

PT

exercices sur les surfaces et courbes spatiales

2024/2025

feuille N° 14

-  **1** a) Donner un point et un vecteur directeur de la droite  $\mathcal{D}$  d'équations cartésiennes  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - 3z \end{cases}$ .
- b) Trouver les points réguliers de la surface  $S$  d'équation  $xy = z^3$ .
- c) Donner les plans tangents à  $S$  qui contiennent  $\mathcal{D}$ .
- \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_
- 2** a) Donner le plan tangent au point de paramètre  $(1, 1)$  à la surface  $S$  d'équations paramétriques  $\begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = 2u + v \end{cases}$ .
- b) Montrer qu'une équation cartésienne de  $S$  est  $4x^2 + 4xy + y^2 - xz^2 = 0$ .
- c) Montrer que  $S$  est une surface réglée.
- \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_
-  **3** Soit  $(\Gamma)$  la courbe d'équations cartésiennes  $\begin{cases} z^2 - xy + 1 = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ .
- a) Donner un vecteur directeur de la tangente  $\mathcal{T}_0$  à  $(\Gamma)$  en  $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$ .
- b) Donner l'équation cartésienne de la projection orthogonale de  $(\Gamma)$  sur le plan  $z = 0$  et déterminer la nature de la courbe obtenue.
- \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_
- 4** On considère les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'équations cartésiennes respectives :  $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} x = -y \\ z = -1 \end{cases}$ .
- a) Soit  $M$  un point de l'espace euclidien, et  $\mathcal{D}$  la droite  $(A; \vec{u})$ .  
Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ , exprimer  $\overrightarrow{AH}$  en fonction de  $\overrightarrow{AM}$  et de  $\vec{u}$ .  
En déduire que si  $d$  est la distance de  $M$  avec la droite  $\mathcal{D}$ , alors  $d^2 = \overrightarrow{AM}^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})^2}{\|\vec{u}\|^2}$ .
- b) Soit  $M : (x, y, z)$ , calculer les distances respectives  $d_1$  et  $d_2$  de  $M$  avec les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .  
En déduire que les points équidistants de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  forment une surface  $(PH)$  d'équation cartésienne  $2z = xy$ .
- c) Montrer que  $(PH)$  est réglée.
- \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_
- 5** Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . On considère l'hélice droite  $\mathcal{H}$  de paramétrage  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ .
- a) Déterminer un paramétrage de la surface réglée  $\mathcal{R}$  engendrée par les tangentes à  $\mathcal{H}$ .
- b) Soit  $m \in \mathbb{R}^*$ , déterminer la section de  $\mathcal{R}$  par le plan  $z = m.b$ .
- \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_
- 6** On considère la surface  $(H_2)$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ .
- a) Montrer que  $(H_2)$  est une surface de révolution d'axe  $O_z$ , dont on précisera les méridiennes.
- b) Montrer que le paramétrage  $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(u) \cos v \\ y = \operatorname{sh}(u) \sin v \\ z = \operatorname{ch}(u) \end{cases}$  définit une partie de  $(H_2)$ .  
Tous les points de  $(H_2)$  sont-ils ainsi décrits?
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à  $(H_2)$  au point  $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$ .

- \* **7** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , et la surface  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $a(x^2 + y^2)z = (x^2 - y^2)xy$ .
- Préciser la nature des isométries qui à  $M : (x, y, z)$  associent respectivement  $M_1 : (y, -x, z)$ ,  $M_2 : (y, -x, z)$  et  $M_3 : (y, x, -z)$ .  
Montrer que  $M$  appartient à  $\mathcal{P}$  si, et seulement si  $M_k$  appartient à  $\mathcal{P}$  pour  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .  
En déduire les symétries de la surface  $\mathcal{P}$ .
  - Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , déterminer la section de  $\mathcal{P}$  par le plan d'équation cartésienne  $y = \lambda x$  (on étudiera en particulier le cas  $\lambda = \pm 1$ ).
  - Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , et  $f(0, 0) = 0$ . On rappelle que  $f$  admet deux dérivées partielles nulles en  $(0, 0)$ .  
Quel est le plan tangent  $\Pi_0$  à  $\mathcal{P}$  au point  $(0, 0, 0)$ ? Quel est l'intersection de  $\Pi_0$  avec  $\mathcal{P}$ ?
  - Déterminer quatre droites incluses dans  $\mathcal{P}$ .
  - Déterminer l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec le cylindre de révolution d'axe  $O_z$  et de rayon 1.

- \* **8** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère la surface  $(T_\lambda)$  d'équation cartésienne  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \lambda^3$ .
- Déterminer les points singuliers de  $(T_\lambda)$ .
  - Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , déterminer une valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que  $M_\lambda : (\alpha\lambda, -\alpha\lambda - \alpha\lambda, ) \in (T_\lambda)$ .  
Écrire une équation du plan tangent en  $M_\lambda$ .
  - Effectuer le changement de repère orthogonal de matrice  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ , et montrer que l'équation de  $(T_\lambda)$  dans le nouveau repère devient  $(x_1^2 + y_1^2)z_1 = 2\lambda^3$ .
  - En déduire que  $(T_\lambda)$  est une surface de révolution d'axe dirigé par  $(1, 1, 1)$ , et préciser les méridiennes de  $(T_\lambda)$ .

- \*\* **9** On considère le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A : (2, 0, 0)$  et de rayon 1, inclus dans le plan vertical  $y = 0$ .
- Déterminer un paramétrage du tore  $\mathcal{T}$  obtenu par révolution de  $\mathcal{C}$  autour de l'axe  $O_z$ .
  - Montrer qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{T}$  est  $(x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 + 16z^2 = 16$ .
  - Montrer que  $B : \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Écrire une équation du plan  $\Pi$  tangent à  $\mathcal{T}$  en  $B$ .
  - Montrer que  $M \in \Pi \cap \mathcal{T}$  si, et seulement si  $\frac{1}{9}(4x^2 + 3y^2 + 6y - 9)(4x^2 + 3y^2 - 6y - 9) = 0$  et en déduire que  $M \in \Pi \cap \mathcal{T}$  se compose de deux ellipses (qui sont en fait des cercles, appelés cercles de VILLARCEAU).