PT corrigé des exercices sur les surfaces et courbes spatiales 2024/2025

☞ **1** **a)** Donner un point et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - 3z \end{cases}$.

b) Trouver les points réguliers de la surface S d'équation $x\,y = z^3$.

c) Donner les plans tangents à S qui contiennent $\mathscr{D}$.

Réponse :

a) Deux points de D : $(4,3,0)$ et $(4,0,1)$, donc D passe par $\boxed{A:(4,0,1)}$ est dirigée par $\boxed{\vec{u}:(0,3,-1)}$.

b) Posons $\phi(x,y,z) = x\,y - z^3$, alors $\vec{\nabla}\phi = \left(y, x, -3z^2\right)$.

$\vec{\nabla}\phi = \vec{0}$ si, et seulement si, $x = y = z = 0$.

$\boxed{\text{Tous les points de } S \text{ différents de } O : (0,0,0) \text{ sont réguliers.}}$

c) Soit $M_0 : (x_0, y_0, z_0) \in S \setminus \{(0,0,0)\}$, alors $x_0\,y_0 = z_0^3$; Le plan tangent Π_0 à S contient $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\vec{\nabla}\phi(M_0) \perp \vec{u}$ et $A \in \Pi_0$.

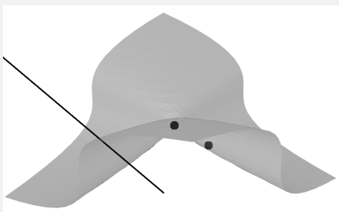
$\vec{\nabla}\phi(M_0) \perp \vec{u}$ équivaut à $3x_0 + 3z_0^2 = 0$, et $A \in \Pi_0$ équivaut à $(4 - x_0)y_0 + (0 - y_0)x_0 + (1 - z_0)(-3z_0^2) = 0$.

On trouve donc le système d'équations $\begin{cases} x_0\,y_0 = z_0^3 \\ x_0 = -z_0^2 \\ 4y_0 - 2x_0y_0 + 3z_0^3 - 3z_0^2 = 0 \end{cases}$.

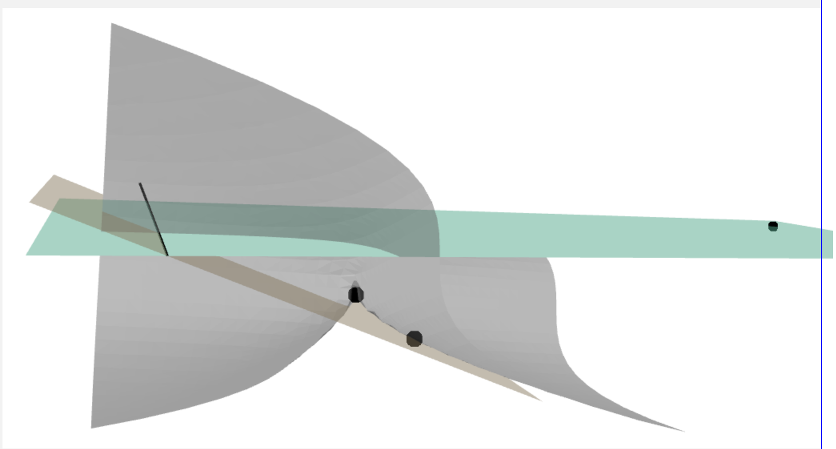
Si $z_0 = 0$, alors $x_0 = y_0 = 0$, ce qui est exclus (point singulier).

Si $z_0 = 0$, on trouve $x_0 = -z_0^2$, $y_0 = -z_0$, puis $-4z_0 - 2z_0^2 + 3z_0^2 + 2z_0^3 = 0$, soit $z_0^2 - 3z_0 + 4 = 0$. On trouve alors : $\boxed{(x_0, y_0, z_0) = (16, -4, 4) \text{ ou } (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1).}$

Les équations des plans correspondants sont $x + 4y + 12z = 16$, $x - y - 3z = 1$.



S, D, les trois points



…et les plans tangents

* **2** **a)** Donner le plan tangent au point de paramètre $(1,1)$ à la surface S d'équations paramétriques $\begin{cases} x = u^2 \\ y = u\,v \\ z = 2u + v \end{cases}$.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de S est $4x^2 + 4x\,y + y^2 - x\,z^2 = 0$.

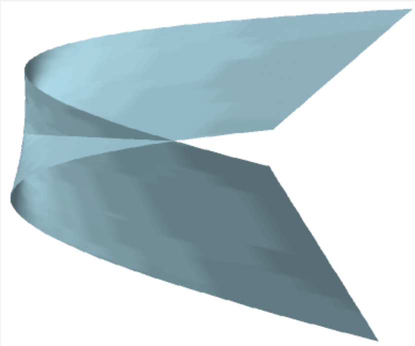
c) Montrer que S est une surface réglée.

Réponse :

a) Les coordonnées de $A : M(1,1)$ sont $(1,1,3)$. S est définie par une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$, avec $\dfrac{\partial M}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$. En A, on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc un vecteur normal en A est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, et le plan tangent à S en A a pour équation $\boxed{x+2y-2z+3=0}$.

b) Avec $x = u^2, y = uv, z = 2u+v$, $4x^2+4xy+y^2-xz^2 = 4u^4+4u^3v+u^2v^2-u^2(4u^2+4uv+v^2) = 0$, donc une équation cartésienne de S est $\boxed{4x^2+4xy+y^2-xz^2=0}$.

c) Le paramétrage de S s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{OM}(u,v) = \overrightarrow{OP}(u) + v\vec{\alpha}(u)$. S est donc une surface réglée, de génératrices $\mathscr{D}_u : (P(u); \alpha(u))$.



S est réglée

☞ **3** Soit (Γ) la courbe d'équations cartésiennes $\begin{cases} z^2 - xy + 1 = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

a) Donner un vecteur directeur de la tangente $\mathscr{T}_0$ à (Γ) en $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$.

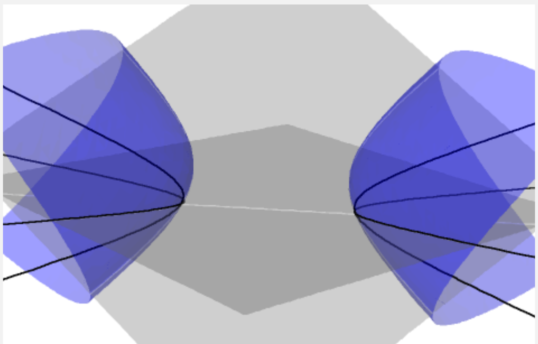
b) Donner l'équation cartésienne de la projection orthogonale de (Γ) sur le plan $z = 0$ et déterminer la nature de la courbe obtenue.

Réponse :

a) Considérons les fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x,y,z) = z^2 - xy + 1$ et $\psi(x,y,z) = x - y + z - 1$. φ et ψ sont polynomiales, donc de classe $\mathscr{C}^1$, et $\vec{\nabla}\varphi = (-y_0, -x_0, 2z_0)$, $\vec{\nabla}\psi = (1,-1,1)$.
Le produit vectoriel de ces deux gradients : $(x_0+2z_0, -y_0+2z_0, x_0+y_0)$, est non nul puisque $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$, et appartient aux deux plans tangents aux surfaces d'équations $z^2-xy+1=0$ et $x-y+z=1$, donc $\boxed{(-y_0,-x_0,2z_0) \text{ est un vecteur directeur à } \mathscr{T}_0}$.

b) On obtient une équation cartésienne de la projection orthogonale de (Γ) sur le plan $z=0$ en *éliminant z* des équations de (Γ) :
de $x-y+z=1$, on extrait $z = 1-x+y$, puis en portant ceci dans $z^2-xy+1=0$: $(1-x+y)^2-xy+1=0$ soit $x^2+y^2-3xy-2x+2y+2=0$.

Ceci est l'équation d'une conique. La matrice associée est $S = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X-1)^2 - \dfrac{9}{4} = \left(X - \dfrac{5}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$.
Les deux valeurs propres étant de signe opposé, il s'agit d'une hyperbole.



(Γ), *O_{xy}, la projection*

* **4** On considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations cartésiennes respectives : $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -y \\ z = -1 \end{cases}$.

a) Soit M un point de l'espace euclidien, et $\mathscr{D}$ la droite $(A;\vec{u})$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et de $\vec{u}$.

En déduire que si d est la distance de M avec la droite $\mathscr{D}$, alors $d^2 = \overrightarrow{AM}^2 - \dfrac{(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})^2}{\|u\|^2}$.

b) Soit $M:(x,y,z)$, calculer les distances respectives d_1 et d_2 de M avec les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
En déduire que les points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ forment une surface (PH) d'équation cartésienne $2z = xy$.

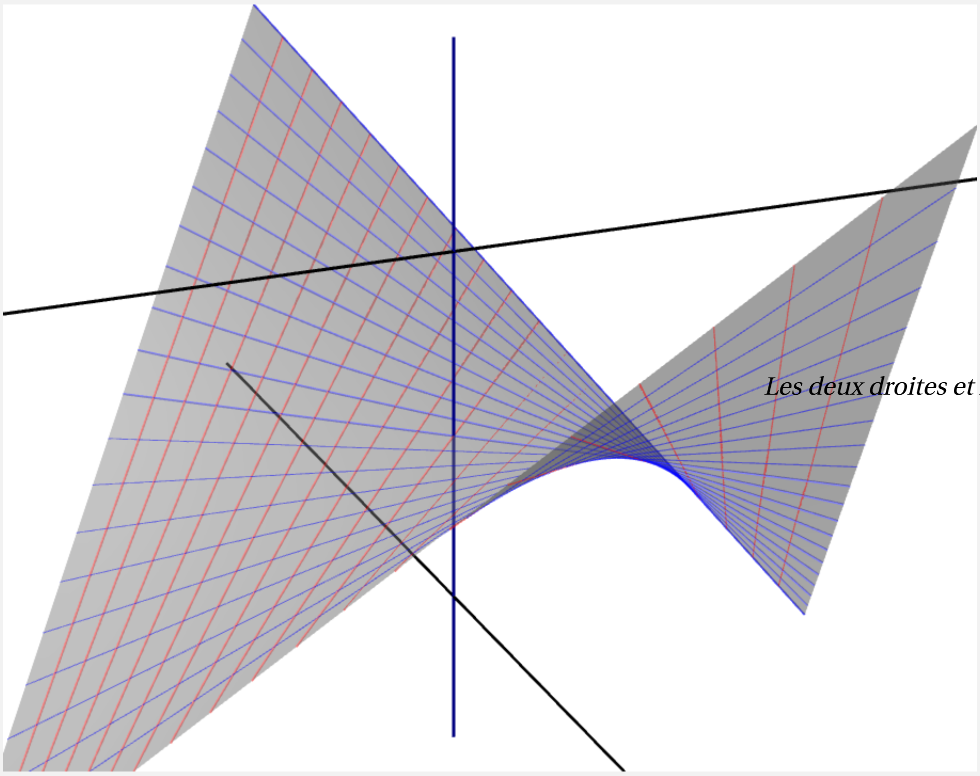
c) Montrer que (PH) est réglée.

Réponse :

a) $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}}{\|u\|^2}\vec{u}$, donc $AH^2 = \dfrac{(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})^2}{\|u\|^2}$; or $d = \mathrm{d}(M,\mathscr{D}) = MH$, et d'autre part d'après le théorème de Pythagore : $AH^2 + HM^2 = AM^2$, donc $\boxed{d^2 = AM^2 - AH^2 = \overrightarrow{AM}^2 - \dfrac{(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u})^2}{\|u\|^2}}$.

b) D'après la question précédente, et puisque $\mathscr{D}_1 = (A_1,\vec{u}_1), \mathscr{D}_2 = (A_2,\vec{u}_2)$, avec $A_1 : (0,0,1), A_2 : (0,0,-1), \vec{u}_1 : (1,1,0)$ et $\vec{u}_2 : (1,-1,0)$, donc
$d_1^2 = x^2+y^2+(z-1)^2 - \dfrac{(x+y)^2}{2}$ et $d_2^2 = x^2+y^2+(z+1)^2 - \dfrac{(x-y)^2}{2}$; $d_2^2 - d_1^2 = 4z - 2xy$. Donc les points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ forment une surface (PH) d'équation cartésienne $2z = xy$.

c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(PH) \cap x = \alpha$ est défini par les équations $x = \alpha$ et $2a = \alpha y$, donc est une droite $\mathscr{D}_\alpha$. (PH) est recouverte par les droites $\mathscr{D}_\alpha$, donc elle est réglée.



Les deux droites et l'axe O_z, (PH)

* **5** Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère l'hélice droite $\mathscr{H}$ de paramétrage $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$.

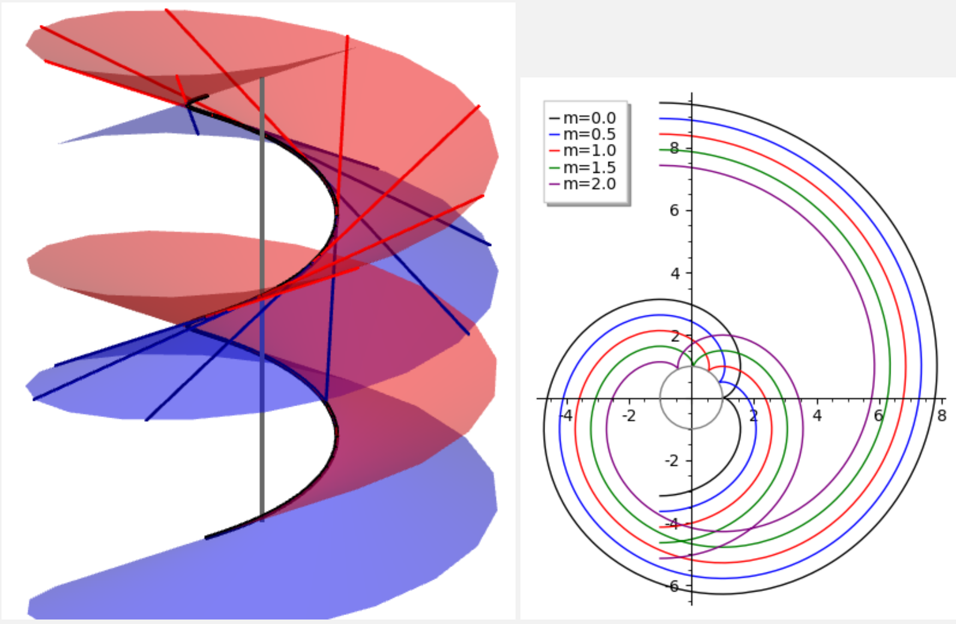
a) Déterminer un paramétrage de la surface réglée $\mathscr{R}$ engendrée par les tangentes à $\mathscr{H}$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}^*$, déterminer la section de $\mathscr{R}$ par le plan $z = m.b$.

Réponse :

a) $\overrightarrow{M}'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ z = b \end{pmatrix}$, donc un paramétrage de la surface réglée $(\mathscr{R})$ engendrée par les tangentes à $\mathscr{H}$ est $\begin{cases} x = a\cos t - \lambda a \sin t \\ y = a\sin t + \lambda a\cos t \\ z = b(t+\lambda) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $z = b(t+\lambda) = m.b$ donc $\lambda = m - t$, ce qui définit la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = a\cos t - a(m-t)\sin t \\ y = a\sin t + a(m-t)\cos t \\ z = b\,m \end{cases}$. Il s'agit d'une spirale (la développante de cercle).



ci-dessus; l'hélice, $(\mathscr{R})$*, la section.*

* **6** On considère la surface (H_2) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

a) Montrer que (H_2) est une surface de révolution d'axe O_z, dont on précisera les méridiennes.

b) Montrer que le paramétrage $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(u)\cos v \\ y = \operatorname{sh}(u)\sin v \\ z = \operatorname{ch}(u) \end{cases}$ définit une partie de (H_2).

Tous les points de (H_2) sont-ils ainsi décrits ?

c) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (H_2) au point $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$.

Réponse :

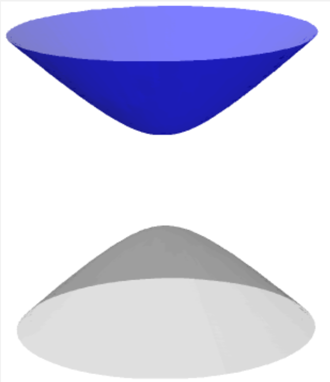
a) En coordonnées cylindriques ($r^2 = x^2 + y^2$), l'équation cartésienne devient $r^2 - z^2 = 1$, ce qui correspond à une surface de révolution.

La section de (H_2) par le plan $y = 0$ est $\boxed{\text{l'hyperbole d'équations } x^2 - z^2 = 1, y = 0}$.

b) Avec $(x = \operatorname{sh}(u)\cos v, y = \operatorname{sh}(u)\sin v, z = \operatorname{ch}(u))$, $x^2 + y^2 = \operatorname{sh}^2(u)$ donc $x^2 + y^2 - z^2 = \operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{ch}^2(u) = -1$.

Cependant, les points de (H_2) qui vérifient $z \leqslant -1$ (par exemple $(0,0,-1)$) ne peuvent pas être atteints par $z = \operatorname{ch}(u)$. $\boxed{\text{Tous les points de } (H_2) \text{ sont pas décrits par le paramétrage}}$.

c) Posons $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, alors $M \in (H_2) \iff \phi(x,y,z) = 0$; or $\vec{\nabla}\phi(M_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$, donc une équation cartésienne du plan tangent à (H_2) au point $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$ est $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z(z - z_0) = 0$, soit $\boxed{x_0 x + y_0 y + z_0 z = -x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 = -1.}$



les deux calottes de $(H2)$

$*$ **7** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et la surface $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $a\left(x^2 + y^2\right)z = \left(x^2 - y^2\right)x\,y$.

a) Préciser la nature des isométries qui à $M : (x,y,z)$ associent respectivement $M_1 : (y, -x, z)$, $M_2 : (y, -x, z)$ et $M_3 : (y, x, -z)$.
Montrer que M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si M_k appartient à $\mathscr{P}$ pour $k \in [\![1,3]\!]$.
En déduire les symétries de la surface $\mathscr{P}$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation cartésienne $y = \lambda\,x$ (on étudiera en particulier le cas $\lambda = \pm 1$).

c) Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{(x^2 - y^2)x\,y}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$. On rappelle que f admet deux dérivées partielles nulles en $(0,0)$.
Quel est le plan tangent Π_0 à $\mathscr{P}$ au point $(0,0,0)$? Quel est l'intersection de Π_0 avec $\mathscr{P}$?

d) Déterminer quatre droites incluses dans $\mathscr{P}$.

e) Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le cylindre de révolution d'axe O_z et de rayon 1.

Réponse :

a) L'isométrie qui à $M : (x,y,z)$ associe $M_1 : (y, -x, z)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est la rotation d'axe O_z d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. de plan $x = 0$; l'isométrie qui à $M : (x,y,z)$ associe $M_2 : (x, -y, z)$ est la rotation d'axe O_z d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

L'isométrie qui à $M : (x,y,z)$ associe $M_3 : (y, x, -z)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; c'est un demi-tour d'axe dirigé par $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

$a\left(x^2 + y^2\right)z - \left(x^2 - y^2\right)x\,y = a\left((-y)^2 + x^2\right)z - \left((-y)^2 - x^2\right)x(-y) = a\left(y^2 + (-x)^2\right)z - \left(y^2 - (-x)^2\right)(-x)\,y = a\left(y^2 + x^2\right)(-z) - \left(y^2 - x^2\right)x\,y$, donc

$(M$ appartient à $\mathscr{P}) \iff (M_k$ appartient à $\mathscr{P})$ pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.

$\boxed{\mathscr{P} \text{ est donc invariant par les rotations d'angle } \frac{\pi}{2}, \pi \text{ et } \frac{\pi}{2}, \text{ et le demi-tour d'axe dirigé par } \vec{\imath} + \vec{\jmath}\ldots}$.

…et leurs composées.

Réponse :

a) La section de$\mathscr{P}$ par le plan d'équation cartésienne $y = \lambda x$ est définie par les équations $\begin{cases} a(x^2+y^2)z = (x^2-y^2)xy \\ y = \lambda x \end{cases}$, soit $\begin{cases} a(1+\lambda^2)x^2z = (1-\lambda^2)\lambda x^4 \\ y = \lambda x \end{cases}$, donc $y = \dfrac{(1-\lambda^2)\lambda}{1+\lambda^2}x^2$ (même si $x = y = 0$).

L'intersection est donc la droite $y = \pm x, z = 0$ si $\lambda = 1$, et $\boxed{\text{une parabole si } \lambda \neq \pm 1}$.

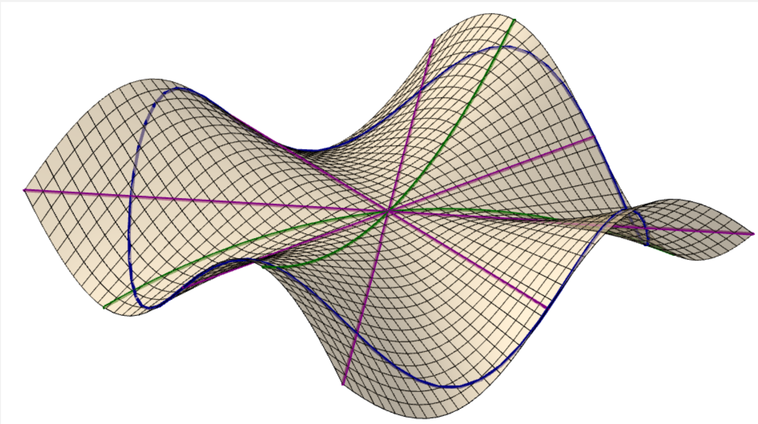
b) Π_0 est horizontal; c'est le plan O_{xy} d'équation $z = 0$.

$\Pi_0 \cap \mathscr{P}$ est défini par $\begin{cases} (x^2-y^2)xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; ceci correspond à la réunion des droites $D_1 : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$; $D_2 : \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$; $D_3 : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $D_4 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

c) Les droites $(D_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ sont incluses dans $\mathscr{P}$.

d) Le cylindre (Σ) a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$; on peut donc poser $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$; et alors $z = \dfrac{(x^2-y^2)xy}{a(x^2+y^2)} = \dfrac{\cos(2\theta)\sin(2\theta)}{a} = \dfrac{\sin(4\theta}{4a}$.

L'intersection de (Σ) avec $\mathscr{P}$ est $\boxed{\text{la courbe paramétrée par } \theta \mapsto \left(\cos\theta, \sin\theta, \dfrac{\sin(4\theta}{4a}\right)}$.



* **8** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la surface (T_λ) d'équation cartésienne $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \lambda^3$.

a) Déterminer les points singuliers de (T_λ).

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer une valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $M_\lambda : (\alpha\lambda, -\alpha\lambda - \alpha\lambda,) \in (T_\lambda)$.
Écrire une équation du plan tangent en M_λ.

c) Effectuer le changement de repère orthogonal de matrice $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, et montrer que l'équation de (T_λ) dans le nouveau repère devient $(x_1^2 + y_1^2)z_1 = 2\lambda^3$.

d) En déduire que (T_λ) est une surface de révolution d'axe dirigé par $(1,1,1)$, et préciser les méridiennes de (T_λ).

Réponse :

a) Posons $\varphi_\lambda(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz-\lambda^3$, alors $\vec{\nabla}\varphi_\lambda = \left(3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy\right)$. Les points singuliers de (T_λ) sont donc ceux qui vérifient le système $\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \\ z^2 = xy \end{cases}$.

Si un des trois nombres (x,y,z) est nul, alors $(x,y,z) = (0,0,0)$.

Si aucun des trois nombres (x,y,z) n'est nul, alors par division des deux premières équations : $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y}{x}$ donc $y^3 = x^3$, puis $y = x$ et de la même manière $x = y = z$.

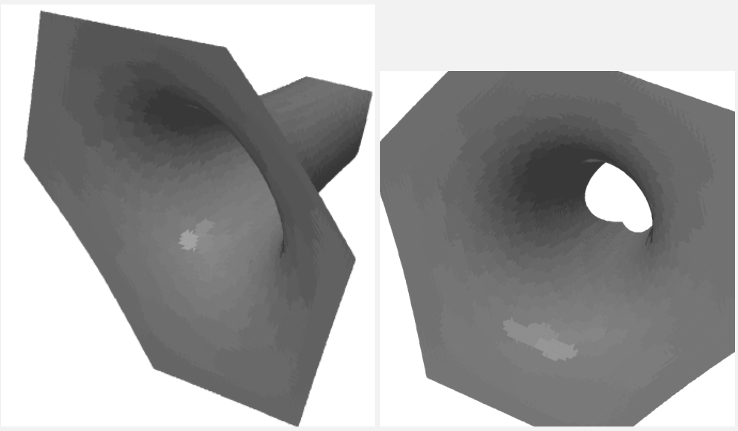
Les points singuliers de (T_λ) appartiennent à la droite d'équation $x = y = z$; alors $x^3+y^3+z^3-3xyz = 3x^3-3x^3 = 0$, donc $\boxed{(T_\lambda) \text{ n'a pas de point singulier si } \lambda \neq 0}$, et les points singuliers de (T_0) forment la droite d'équation $x = y = z$.

b) Avec $(x,y,z) = (\alpha\lambda, -\alpha\lambda, -\alpha\lambda)$, $x^3+y^3+z^3-3xyz = \alpha^3\lambda^3-\alpha^3\lambda^3-\alpha^3\lambda^3-3\alpha^3\lambda^3 = -4\alpha^3\lambda^3$ qui vaut λ^3 si, et seulement si, $\boxed{\alpha = -4^{-1/3}}$.

En ce point, une équation du plan tangent à (T_λ) est $y+z = 0$.

c) En effectuant le changement de repère $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et en portant ces égalités dans l'équation de (T_λ), on trouve successivement : $x+y+z = \sqrt{3}z_1$, $x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2$ (car $P \in \mathscr{O}(3)$), et $xy+yz+zx = \dfrac{1}{2}\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right) = -\dfrac{1}{2}x_1^2-\dfrac{1}{2}y_1^2+z_1^2$, $x^3+y^3+z^3-3xyz = \dfrac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2\right)z_1$; alors $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-3xyz = \left(x_1^2+y_1^2\right)z_1$, d'où l'équation réduite $\boxed{\left(x_1^2+y_1^2\right)z_1 = 2\lambda^3}$.

d) Dans le nouveau repère obtenu par rotation de matrice P, l'axe vertical est dirigé par $(1,1,1)$ et une équation de (T_λ) en cylindriques est $r_1^2.z_1 = 2\lambda^3$, ce qui caractérise une surface de révolution d'axe $(1,1,1)$ et dont la méridienne a pour équation $\boxed{z_1 = \dfrac{2\lambda^3}{x_1^2}}$ dans le plan $O_{x_1y_1}$ (d'équation $x+y+z = 0$).



ci-dessus : deux vues de (T_1)

** **9** On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A : (2,0,0)$ et de rayon 1, inclus dans le plan vertical $y = 0$.

a) Déterminer un paramétrage du tore $\mathscr{T}$ obtenu par révolution de $\mathscr{C}$ autour de l'axe O_z.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{T}$ est $\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2+16z^2 = 16$.

c) Montrer que $B : \left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{T}$. Écrire une équation du plan Π tangent à $\mathscr{T}$ en B.

d) Montrer que $M \in \Pi\cap\mathscr{T}$ si, et seulement si $\dfrac{1}{9}\left(4x^2+3y^2+6y-9\right)\left(4x^2+3y^2-6y-9\right) = 0$ et en déduire que $M \in \Pi\cap\mathscr{T}$ se compose de deux ellipses (qui sont en fait des cercles, appelés cercles de Villarceau).

Réponse :

a) Le cercle de centre $A:(2,0,0)$ et de rayon 1, inclus dans le plan vertical $y=0$, est paramétré par $\overrightarrow{OC}(\varphi)=\begin{pmatrix}2+\cos\varphi\\0\\\sin\varphi\end{pmatrix}$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

La matrice de la rotation d'axe O_z et d'angle θ est $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$., donc un paramétrage du tore est $\boxed{R_\theta.\overrightarrow{OC}(\varphi)=\begin{pmatrix}(2+\cos\varphi)\cos\theta\\(2+\cos\varphi)\sin\theta\\\sin\varphi\end{pmatrix}}$

b) Avec ce paramétrage : $x^2+y^2=(2+\cos\varphi)^2=4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi$, donc $x^2+y^2+z^2=4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=5+4\cos\varphi$, puis $\boxed{(x^2+y^2+z^2-5)^2+16z^2=16\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=16}$.

c) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-5\right)^2+16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{12}{4}-5\right)^2+16\frac{3}{4}=4+12=16$ donc $B\in\mathcal{T}$.

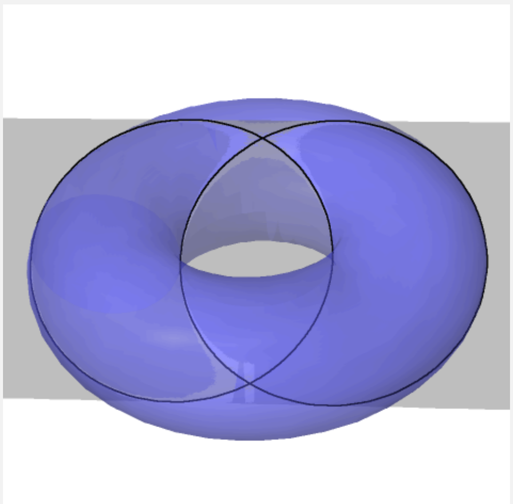
$\vec{\nabla}\left(\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2+16z^2-16\right)$
$=\left(4\left(x^2+y^2+z^2-5\right)x,4\left(x^2+y^2+z^2-5\right)y,4\left(x^2+y^2+z^2-5\right)z+32z\right)$, soit en B : $\vec{\nabla}\left(\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2+16z^2-16\right)(B)=\left(-12,0,12\sqrt{3}\right)$.

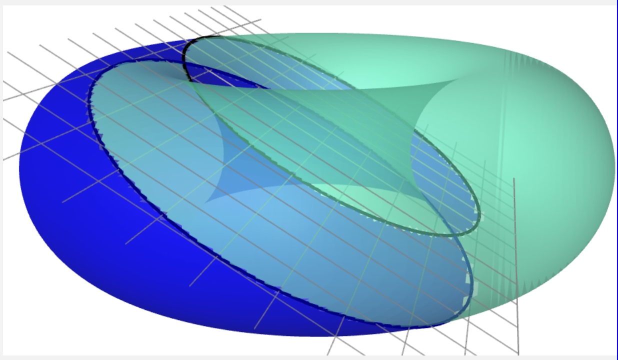
On trouve alors qu'une équation du plan Π tangent à $\mathcal{T}$ en B est $\boxed{x-\sqrt{3}z=0}$.

d) $\Pi\cap\mathcal{T}$ est donc défini par les deux équations $x=\sqrt{3}z$ et (2) : $\frac{1}{9}\left(4x^2+3y^2-15\right)^2+\frac{16}{3}x^2=16$; or $\left(4x^2+3y^2+6y-9\right)\left(4x^2+3y^2-6y-9\right)=\left(4x^2+3y^2-9\right)^2-(6y)^2$
$=\left(4x^2+3y^2\right)^2-18(4x^2+3y^2)+81-36y^2=\left(4x^2+3y^2\right)^2-30(4x^2+3y^2)+225+48x^2-144=\left(4x^2+3y^2-15\right)^2+3\times16x^2-16\times9$.

Donc $M\in\Pi\cap\mathcal{T}$ si, et seulement si $\boxed{\frac{1}{9}\left(4x^2+3y^2+6y-9\right)\left(4x^2+3y^2-6y-9\right)=0}$.

Ces deux équations définissent des ellipses :





ci-dessus : deux vues de $(\mathcal{T})$ et des cercles de Villarceau