PT exercices sur le calcul différentiel 2024/2025

feuille N° 13

∗ **1** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$; on pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ et on considère la fonction T définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $T(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $T(x,x) = f'(x)$. Montrer que T est de classe $\mathscr{C}^{p-1}$.

Indication : montrer que $T(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx + (1-t)y)\mathrm{d}t$.

∗ **2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

a) f est-elle continue en $(0,0)$?

b) Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles que l'on déterminera. Calculer la différentielle de f en $(0,0)$.

c) Montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^2$ en $(0,0)$.

∗ **3** **a)** Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$; exprimer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}t$ en fonction de g, montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x,x) + \displaystyle\int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

c) Généraliser cette propriété à toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^2$.

Indication : poser $\Phi(x,y) = \displaystyle\int_x^y f(x,t)\mathrm{d}t$, calculer ses dérivées partielles, et remarquer que $F(x) = \Phi(x,x)$.

∗ **4** Soit les ensembles $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ et $T = \{(x,y) \in T, 0 < y < x\}$.
On considère la fonction F définie par $F(x,y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$ et $F(x,y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Représenter K et T.

b) La fonction F admet-elle des extremums locaux sur T ?

c) La fonction F admet-elle un minimum sur K ? Un maximum ? Si oui, déterminer leur valeur.

☞ **5** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-2x+2}$.

a) $P_y : x \mapsto x^2 + y^2 - 2x + 2$ admet-il un minimum sur $\mathbb{R}$?

b) Calculer le gradient de f.

c) Montrer que f admet un maximum global, mais pas de minimum global.

☞ **6** Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ et donner leur nature.

☞ **7** On étudie $f : (x,y) \mapsto x^2 y(4-x-y)$ sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 4\}$.

a) Tracer Δ.

b) Trouver tous les extremums locaux et globaux de f sur Δ.

∗ **8** On pose $f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$ pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.
Déterminer les extremums de f sur $(\mathbb{R}_*^+)^2$.

☞ **9** Résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles :

$$(E_1): \quad -2\frac{\partial f}{\partial x}+3\frac{\partial f}{\partial y}=2x+2y \qquad\qquad (E_2): \quad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=f(x,y)$$

en utilisant le changement de variables $(u,v)=(x+y,3x+2y)$.

---

* **10** Trouver les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=16xy$

Indication : on pourra envisager le changement de variables $u=x+y$, $v=x-y$.

---

* **11** On note $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; on donne $p\in\mathbb{R}$ et $g\in\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Trouver les fonctions $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ définies par $\forall(x,y)\in U, g(x,y)=f(x^2+y^2)$,

qui vérifient $(E):\forall(x,y)\in U,\quad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p$.

** **12** Soit le changement de variables défini par $\phi(x,y)=(u,v)=(x^2+y^2,2xy)$.

a) Montrer que ϕ définit une application bijective de classe $\mathscr{C}^1$ de $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>y\right\}$ dans $V=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2, u>|v|\right\}$.

b) Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $f=g\circ\phi$.

Montrer que f vérifie $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(y^2-x^2)f(x,y)$ si, et seulement si, g vérifie une équation aux dérivées partielles à déterminer.

c) Résoudre cette équation et en déduire f.