

PT

corrigé des exercices sur le calcul différentiel

2024/2025

- * **1** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$; on pose $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\}$ et on considère la fonction T définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ et $T(x, x) = f'(x)$. Montrer que T est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.

Indication : montrer que $T(x, y) = \int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dt$.

Réponse : Soit $x \neq y$, effectuons dans l'intégrale $\int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dt$ le changement affine de variable $u = tx + (1-t)y = 1 + (x-y)t : du = (x-y)dt$ donc

$$\int_0^1 f'(tx + (1-t)y) dt = \int_y^x f'(u) \frac{du}{x-y} = \frac{1}{x-y} [f(u)]_y^x = \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = T(x, y).$$

On trouve directement $\int_0^1 f'(tx + (1-t)x) dt = \int_0^1 f'(x) dt = f'(x) = T(x, x)$.

Appliquons alors le théorème de dérivations d'une intégrale dépendant d'un paramètre : pour t variant dans $[0, 1]$, $tx + (1-t)y$ décrit le segment $[x; y]$.

$x \mapsto f'(tx + (1-t)y)$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, 1]$, et $\frac{\partial^k f'(tx + (1-t)y)}{\partial x^k} = t^k f^{(k+1)}(tx + (1-t)y)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $t \mapsto \frac{\partial^k f'(tx + (1-t)y)}{\partial x^k}$ est continue sur $[0, 1]$.

Soit alors $(a, b) \in \mathbb{R}$, et $(x, y) \in [a, b]$; pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in [a, b]$. Comme $f^{(k)}$ est continue sur le segment entre $[a, b]$, elle est bornée, donc $\exists M_k \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f'(tx + (1-t)y)| \leq M_k$, ce qui constitue une hypothèse de domination de $f^{(k)}$ sur $[a, b]$: ainsi les applications $x \mapsto T(x, y)$ et $y \mapsto T(x, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$, et $\frac{\partial^k T}{\partial x^k} = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx + (1-t)y) dt$.

- * **2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

- a) f est-elle continue en $(0, 0)$?
 b) Montrer que f admet en tout point des dérivées partielles que l'on déterminera. Calculer la différentielle de f en $(0, 0)$.
 c) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^2$ en $(0, 0)$.

Réponse :

- a) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ comme rapport de deux polynômes dont le quotient ne s'annule pas. Reste à examiner la situation en $(0, 0)$, où le quotient s'annule.

Tout d'abord, si $(x, y) \neq (0, 0)$, en posant $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (passage en polaires) :

$$f(x, y) = \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = r^2 \cos^3 \theta \sin \theta; \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0). \quad \boxed{f \text{ est continue en } (0, 0).}$$

- b) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + 3y^2)x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} - (2 \cos^2(\theta) - 3)r \cos^2(\theta) \sin(\theta)$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x+y)(x-y)x^3}{(x^2 + y^2)^2} (2 \cos^2(\theta) - 1) r \cos^3(\theta).$$

Par ailleurs, les applications partielles $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont nulles, donc dérivables et de dérivée nulle : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Alors, d'après les expressions en polaires,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \text{ et } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) : \quad \boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ en } (0, 0).}$$

- c) L'expression des dérivées partielles calculées plus haut permet, en posant successivement $x = 0$ et $y = 0$, d'obtenir $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$. Ces expressions sont clairement dérivables et on peut en déduire (existence et valeur) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. Le théorème de Schwarz permet alors d'affirmer que $\boxed{f \text{ n'est pas } \mathcal{C}^2 \text{ en } (0, 0).}$

- * **3** a) Montrer que $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- b) Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$; exprimer $F(x) = \int_0^x f(x, t) dt$ en fonction de g , montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.
- c) Généraliser cette propriété à toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Indication :* poser $\Phi(x, y) = \int_x^y f(x, t) dt$, calculer ses dérivées partielles, et remarquer que $F(x) = \Phi(x, x)$.

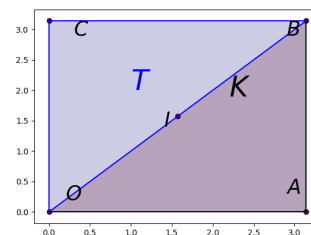
Réponse :

- a) $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{-x^2}$.
- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \exp(x^2 - t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ est $\mathcal{C}^1$ comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$, et $F'(x) = e^{x^2} e^{-x^2} + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 + \int_0^x 2xe^{x^2 - t^2} dt$, or $f(x, x) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2xe^{x^2 - t^2}$, donc $F'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.
- c) f est continue sur $\mathbb{R}^2$, d'où la continuité de $f(x, \cdot)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et de $f(\cdot, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $K = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ contenant 0 : f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur le fermé borné K^2 , donc $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x, t) \in K^2, |f(x, t)| \leq M$. Alors pour tous $(x, y) \in K^2$ et tout t entre 0 et y , $|f(x, t)| \leq M$, et la fonction constante M est intégrable sur K : ceci constitue ainsi une hypothèse de domination. Alors Φ est dérivable sur K comme fonction de x pour tout $y \in K$: K étant arbitraire, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$. Plus simplement, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = f(x, y)$. Alors $F : x \mapsto \Phi(x, x)$ est dérivable et $F'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, x)$ donc $F'(x) = \int_0^x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, x)$.

- * **4** Soit les ensembles $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \pi\}$ et $T = \{(x, y) \in K, 0 < x < y < \pi\}$. On considère la fonction F définie par $F(x, y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leq x \leq y \leq \pi$ et $F(x, y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leq y \leq x \leq \pi$.
- a) Représenter K et T .
- b) La fonction F admet-elle des extremums locaux sur T ?
- c) La fonction F admet-elle un minimum sur K ? Un maximum? Si oui, déterminer leur valeur.

Réponse :

- a) T est le triangle OBC , et K le carré $OABC$, où O, A, B, C sont les points de coordonnées respectives $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi), (0,\pi)$.

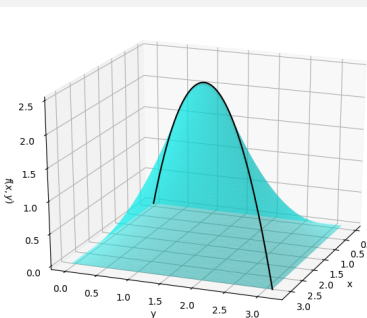


- b) Pour $(x,y) \in T$, $F(x,y) = x(\pi - y)$ donc $\nabla F = (\pi - y, -x)$ qui ne s'annule qu'en $C : (0,\pi)$.
 $C \notin T$, donc F n'admet pas d'extremum

- c) D'après le théorème du maximum, comme K et T sont des fermés bornés et que F est continue sur $\mathbb{R}^2$, F atteint ses extremums sur K et sur T .

Par symétrie par rapport à $y = x$ ($F(x,y) = F(y,x)$), les valeurs maximales et minimales sur K sont atteintes sur K , donc sur la frontière de T , puisqu'aucun point critique n'appartient à l'intérieur de T .

On en déduit que la valeur minimale de F sur K est 0, atteinte sur la frontière du carré, et que la valeur maximale de F sur K est $\frac{\pi^2}{4}$, atteinte au milieu I du carré.



5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 2x + 2}$.

- a) $P_y : x \mapsto x^2 + y^2 - 2x + 2$ admet-il un minimum sur $\mathbb{R}$?
 b) Calculer le gradient de f .
 c) Montrer que f admet un maximum global, mais pas de minimum global.

Réponse :

- a) P_y est un trinôme du second degré avec un coefficient dominant strictement positif. Il admet un minimum en $x = 1$.

b) $\vec{\nabla} f = \frac{-1}{(x^2 + y^2 - 2x + 2)^2} (2x - 2, 2y)$.

- c) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Le seul point critique de f est $(1,0)$, ce qui correspond à un minimum global de P_y , donc à un maximum global de f .

Si f admettait un minimum global, ce serait nécessairement un point critique, ce qui est faux.



6 Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ et donner leur nature.

Réponse : f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\nabla f = (4x^3 - 4(x - y), 4y^3 + 4(y - x))$.

Les points critiques de f vérifient :

$$\begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x^3 = 2x \end{cases}.$$

On trouve donc trois points critiques : $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, 0)$, et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

La matrice hessienne de f est $H(x, y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3x^2 - 1 \end{pmatrix}$.

$H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X - 20)^2 - 4^2 = (X - 16)(X - 24)$, donc admet deux valeurs propres strictement positives ;

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont des minimums, de valeur -8 .

$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, ce qui ne permet pas de conclure immédiatement, mais

$f(x, y) = -2(x - y)^2 + o(x^2 + y^2)$ donc $(0, 0)$ est un maximum.



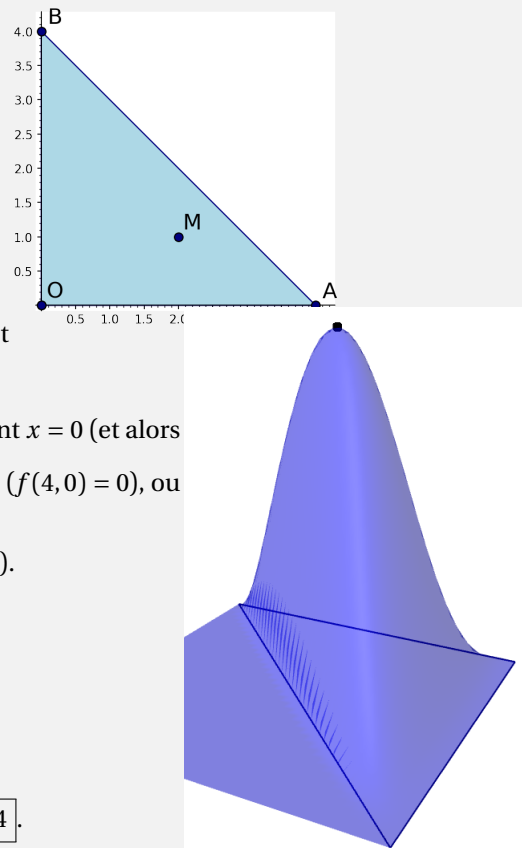
7 On étudie $f : (x, y) \mapsto x^2 y (4 - x - y)$ sur $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$.

a) Tracer Δ .

b) Trouver tous les extremums locaux et globaux de f sur Δ .

Réponse :

a) Δ est le triangle OAB , où $A : (4, 0)$, $B : (0, 4)$.



b) $f(x, y) = -x^3 y - x^2 y^2 + 4x^2 y$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \nabla f &= (-3x^2 y - 2xy^2 + 8xy, -x^3 - 2x^2 y + 4x^2) \\ &= (-xy(3x + 2y - 8), -x^2(x + 2y - 4)). \end{aligned}$$

Les points critiques de Δ sont donc ceux qui vérifient $x = 0$ (et alors

$$f(x, y) = 0) \text{ ou bien } \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ soit } (x, y) = (4, 0) \text{ (} f(4, 0) = 0 \text{), ou}$$

$$\text{encore } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \text{ soit } (x, y) = (2, 1) \text{ (} f(2, 1) = 4 \text{).}$$

La frontière de Δ est la réunion de trois segments :

- * $[OA] : x = 0, 0 \leq y \leq 4, f(x, y) = 0$.
- * $[OB] : y = 0, 0 \leq x \leq 4, f(x, y) = 0$.
- * $[AB] : y = 4 - x, 0 \leq x \leq 4, f(x, y) = 0$.

On en déduit que f présente sur Δ

un maximum (local et global) en $(2, 1)$, de valeur 4.

* **8** On pose $f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

Déterminer les extremums de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Réponse : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On cherche donc les points fixes de f : ils vérifient

$$\nabla f(x, y) = (0, 0), \text{ c'est-à-dire } \left(\ln(y) - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln(x) \right) = (0, 0).$$

De l'équation $\frac{x}{y} = \ln(x)$ on tire $y = \frac{x}{\ln(x)}$, puis $x \ln(y) = y$ devient $x \ln(x) - x \ln(\ln(x)) = \frac{x}{\ln(x)}$, soit

$$\ln(x) \ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) = 1 \text{ (nécessairement } x > 1).$$

Posons alors $x = e^t$: l'équation devient $t(t - \ln(t)) = 1$, soit $\delta(t) = t^2 - t \ln(t) - 1 = 0$.

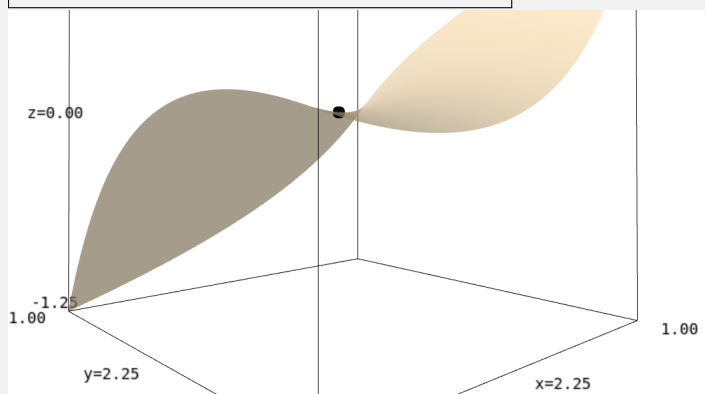
δ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\delta'(t) = 2t - \ln t - 1$ qui reste positive; or $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = -1$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = +\infty$, donc δ

n'a qu'une racine réelle. On constate que $t = 1$ convient. Le seul point critique de f est (e, e) .

La matrice Hessienne de f est $H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{x-y}{xy} \\ \frac{x-y}{xy} & \frac{x-y}{y^2} \end{pmatrix}$, en particulier $H(e, e) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & -e^{-1} \end{pmatrix}$, qui admet

deux valeurs propres opposées donc (e, e) est un point-col de f .

f n'admet aucun extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.



9 Résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles :

$$(E_1) : -2 \frac{\partial f}{\partial x} + 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$(E_2) : \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

en utilisant le changement de variables $(u, v) = (x + y, 3x + 2y)$.

Réponse : $\begin{cases} u = x + y \\ v = 3x + 2y \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = v - 2u \\ y = 3u - v \end{cases}$; alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 3 \frac{\partial f}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial f}{\partial v}, \text{ donc}$$

$$-2 \frac{\partial f}{\partial x} + 3 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Alors $-2 \frac{\partial f}{\partial x} + 3 \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$ équivaut à $\frac{\partial f}{\partial u} = 2u$, soit $f(x, y) = u^2 + F(v) = (x + y)^2 + F(3x + 2y)$ où F

est $\mathcal{C}^1$. $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$ équivaut à $\frac{\partial f}{\partial v} = f$, soit $f(x, y) = G(u)e^v = G(x + y)e^{3x+2y}$ où G est $\mathcal{C}^1$.

* **10** Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16xy$

Indication : on pourra envisager le changement de variables $u = x + y, v = x - y$.

Réponse : Avec le changement de variable bijectif et $\mathcal{C}^1$ $u = x + y, v = x - y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = f'_x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = f'_y \text{ puis}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial f'_x}{\partial x} = \frac{\partial f'_x}{\partial u} + \frac{\partial f'_x}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

(Note : on a utilisé le caractère $\mathcal{C}^2$ de f et le théorème de Schwarz pour les dérivées croisées) ; de même,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f'_y}{\partial y} = \frac{\partial f'_y}{\partial u} - \frac{\partial f'_y}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Par différence : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$

Par ailleurs $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$, donc $xy = \frac{u^2 - v^2}{4}$ donc $16xy = 4(u^2 - v^2).$

L'équation différentielle proposée devient alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = u^2 - v^2$, soit après intégration selon la variable u :

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u^3}{3} - v^2 u + \gamma_1(v) \text{ où } \gamma_1 \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1.$$

Une nouvelle intégration, cette fois par rapport à v , donne $f = \frac{u^3 v}{3} - \frac{v^3 u}{3} + C_1(v) + C_2(u)$ et finalement

$$f(x, y) = \frac{1}{3} ((x+y)^2(x-y) - (x-y)^3(x+y)) + C_1(x+y) + C_2(x-y);$$

$$f(x, y) = \frac{4}{3} xy(x^2 - y^2) + C_1(x+y) + C_2(x-y).$$

* **11** On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; on donne $p \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ définies par $\forall (x, y) \in U, g(x, y) = f(x^2 + y^2)$,

qui vérifient (E) : $\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = (x^2 + y^2)^p.$

Réponse : Avec $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x f'(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y f'(x^2 + y^2)$, puis $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 f''(x^2 + y^2) +$

$$4x^2 f''(x^2 + y^2) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 f''(x^2 + y^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2).$$

Donc (E) équivaut à $4f''(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)f''(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^p$, soit par changement de variable $t = x^2 + y^2$: $4f''(t) + t f''(t) = t^p.$

En posant $h = f'$, on se ramène à (F) : $t h' + h = t^p.$

* La solution générale de l'équation homogène (F_h) : $t h' + h = 0$ est $h_0(t) = \frac{C}{t}.$

* Cherchons une solution particulière polynomiale de (F) :

$$h_1(t) = \sum_{k=0}^p a_k t^k; \text{ alors } t h'_1 + h_1 = \sum_{k=0}^p (k a_k + a_k) t^k = \sum_{k=0}^p (k+1) a_k t^k. h_1(t) = \frac{t^p}{p+1} \text{ convient.}$$

On trouve alors $h(t) = \frac{C}{t} + \frac{t^p}{p+1}$, puis $f(t) = C \ln |t| + \frac{t^{p+1}}{(p+1)^2}.$

Finalement, $g(x, y) = C \ln(x^2 + y^2) + \frac{1}{p+1} (x^2 + y^2)^{p+1}, C \in \mathbb{R}$

** **12** Soit le changement de variables défini par $\phi(x, y) = (u, v) = (x^2 + y^2, 2xy).$

a) Montrer que ϕ définit une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ dans

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > |v|\}.$$

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f = g \circ \phi$.

Montrer que f vérifie $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y^2 - x^2)f(x, y)$ si, et seulement si, g vérifie une équation aux dérivées partielles à déterminer.

c) Résoudre cette équation et en déduire f .

Réponse :

a) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) = (u, v)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u(1) \\ 2xy = v(2) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} u + v = (x + y)^2(1) + (2) \\ u - v = (x - y)^2(1) - (2) \end{cases}'$$

puis, comme $u > |v|$ (donc $u + v > 0$ et $u - v > 0$), et en considérant la condition $x > y$:

$$\begin{cases} x + y = \varepsilon \sqrt{u + v} \\ x - y = \sqrt{u - v} \end{cases} \text{ avec } \varepsilon = \text{signe}(x + y) \in \{-1, 1\}.$$

$$\text{Finalement } \phi(x, y) = (u, v) \iff (x, y) = \left(\varepsilon \sqrt{u + v} + \sqrt{u - v}, \varepsilon \sqrt{u + v} - \sqrt{u - v} \right)$$

Ainsi ϕ est bijective de Ω sur V ; par ailleurs, elle est clairement $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

b) D'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial g}{\partial u} + 2y \frac{\partial g}{\partial v} \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \frac{\partial g}{\partial u} + 2x \frac{\partial g}{\partial v}.$$

$$\text{Par différence : } y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y^2 - x^2) \frac{\partial g}{\partial v}, \text{ donc } (E) \iff \frac{\partial g}{\partial v} = g.$$

c) Pour résoudre $\frac{\partial g}{\partial v} = g$, on procède par analogie avec l'équation ordinaire $y' = y$, en posant $g(u, v) =$

$K(u, v)e^v$; alors $\frac{\partial g}{\partial v} - g = \frac{\partial K}{\partial v} e^v - K e^v - K e^v = \frac{\partial K}{\partial v} e^v$ donc $\frac{\partial g}{\partial v} = g$ équivaut à $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$ sur l'ouvert convexe V , c'est-à-dire $K = C(u)$, où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\text{Finalement } g(u, v) = C(u)e^v \text{ et } f(x, y) = C(x^2 + y^2)e^{2xy}.$$