PT **exercices sur les équations différentielles** **2024/2025**

feuille N° 12

☞ **1** Résoudre les équations différentielles $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = \sin(2x)$ et $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = 1$.

☞ **2** **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; résoudre l'équation différentielle de la variable x : $x\,y' - (1+\lambda)y = 0$.

b) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ X & \longmapsto & X P' - P \end{array}$

Déterminer les éléments propres de φ.

☞ **3** Résoudre l'équation différentielle : $t\,y' - (t+1)y = t^2 - t^3$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.
Retrouver ce résultat en cherchant les solutions DSE.

$**$ **4** On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $(E) : y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et est une solution de (E).
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $G_\alpha : x \mapsto \sin x \displaystyle\int_\alpha^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \cos x \int_\alpha^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est solution de (E) ; montrer que $G_\alpha(x) = \displaystyle\int_\alpha^x \frac{\sin(x-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En admettant la convergence de $G : x \mapsto \displaystyle\int_{+\infty}^x \frac{\sin(x-t)}{t}\,\mathrm{d}t$, montrer que G est une solution de (E), et à l'aide d'un changement de variable, que $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,\mathrm{d}u$.

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = G(x)$.

$*$ **5** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

a) Montrer que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

b) Montrer que sur $]-R, R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie l'équation différentielle
$(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.

c) En déduire une expression de S à l'aide des fonctions usuelles, puis de a_n comme une somme.

☞ **6** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de S.

b) Montrer que S est solution de l'équation différentielle $y'' - 2\cos\theta\, y' + y = 0$ et en déduire $S(x)$.

☞ **7** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = a|t| + b$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Montrer que, pour des conditions initiales $y(t_0) = v_0$, $y'(t_0) = d_0$, il existe une seule solution de (E) qui vérifie ces conditions initiales et qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

☞ **8** Déterminer les solutions développables en série entière de $(E_9) : t(1-t)y'' + t\,y' - y = 0$, ainsi que leur rayon de convergence.
Existe-t-il d'autres solutions de (E_9) ? Achever la résolution de (E_9).

** **9** Soit v une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $(uv)'' = u''v''$ avec $u(t) = t^p$, $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$.
Expliciter l'équation différentielle vérifiée par v et en chercher les solutions développables en série entière.
Obtient-on ainsi toutes les solutions ?

---

* **10** **a)** Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(E) : (1-t^2)y'' - 3t\,y' - y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, sachant que $y_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est solution de l'équation sans second membre.

b) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène $(E_h) : (1-t^2)y'' - 3t\,y' - y = 0$, et en déduire un développement en série entière de $\dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

---

* **11** Résoudre $4(1-x^2)y'' - 4x\,y' + y = 0$ sur $]-1,1[$ en utilisant un changement de variable $x = \sin t$.

Indication : Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ en fonction de $\cos(t), \sin(t), \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ et écrire l'équation différentielle en fonction de la variable t et de l'expression y (en fait $y(x)$).

En déduire que les fonctions $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$ et $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$ sont développables en série entière sur $]-1;1[$.

---

* **12** On considère l'équation différentielle $4t\,y'' + 2y' - y = 0$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ soit une solution de (E).
Déterminer une solution u de (E) développable en série entière, telle que $u(0) = 1$.
On fournira une expression explicite de $u(t)$ pour $t \geqslant 0$, et une expression pour $t \geqslant 0$.
Toutes les solutions de (E) sont-elles développables en série entière ?

b) Pour $t > 0$, montrer que $y(t) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right) z(t)$ est solution de (E) si, et seulement si, z' est solution d'une équation du premier degré que l'on précisera.

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du changement de variable $t = x^2$.

exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1^{er} ordre	X	X	X		X							
2^{nd} ordre				X		X	X	X	X	X	X	X
séries entières			X		X	X		X	X	X	X	X