PT corrigé des exercices sur les équations différentielles 2024/2025

☞ **1** Résoudre les équations différentielles $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = \sin(2x)$ et $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = 1$.

Réponse : on résout les deux équations sur un intervalle où $\cos(x) \neq 0$, donc $I_p = \left]-\frac{\pi}{2} + p\pi, \frac{\pi}{2} + p\pi\right[$.

$\star$: $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = \sin(2x)$

Résolution de l'équation homogène $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = 0$**.**

$\displaystyle\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \ln|\cos x|$, donc les solutions de l'équation homogène forment une droite vectorielle dirigée par $u(x) = \cos x$.

Méthode de variation des constantes : on pose $y = k.u$, donc $y' = uk' + k'u$ et $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = \cos(x)u.k' + (\cos(x)\,u' + \sin(x)\,u)k = \cos^2(x)k'$; l'équation s'écrit donc $k' = \dfrac{\sin(2x)}{\cos^2(x)} = 2\tan(x)$.

$k(x) = -2\ln|\cos x|$ convient, ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = -2\ln|\cos x|\cos x$.

L'ensemble des solutions de cette équation sur I_p est $\boxed{y(x) = C\cos x - 2\ln|\cos x|\cos x, C \in \mathbb{R}.}$

$\star$: $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = 1$

Résolution de l'équation homogène $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = 0$**.**

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$, donc les solutions de l'équation homogène forment une droite vectorielle dirigée par $u(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Méthode de variation des constantes : on pose $y = k.u$, donc $y' = uk' + k'u$ et $\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = \cos(x)u.k' + (\cos(x)\,u' + \sin(x)\,u)k = k'$; l'équation s'écrit donc $k' = 1$.

$k(x) = x$ convient, ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = \dfrac{x}{\cos x}$.

L'ensemble des solutions de cette équation sur I_p est $\boxed{y(x) = \dfrac{C + x}{\cos x}, C \in \mathbb{R}.}$

☞ **2** **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; résoudre l'équation différentielle de la variable x : $x\,y' - (1+\lambda)y = 0$.

b) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ X & \longmapsto & X\,P' - P \end{array}$

Déterminer les éléments propres de φ.

Réponse :

a) $x\,y' - (1+\lambda)y = 0$ est linéaire homogène du premier ordre. On la résout sur un des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Les solutions forment une droite vectorielle dirigée par $u : t \mapsto \exp(1+\lambda)\ln|x| = |x|^{1+\lambda}$.

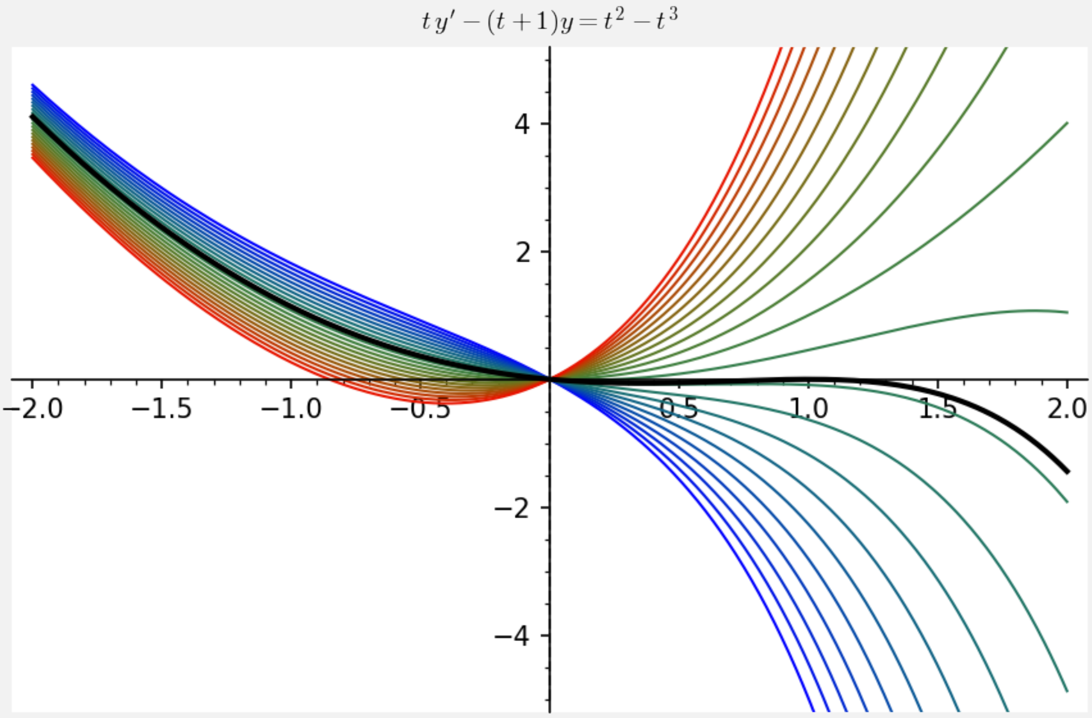
b) φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, dont les vecteurs propres [associés à la valeur propre λ] vérifient $X\,P' - P = \lambda\,P$ soit $x\,P' = (1+\lambda)P$.

Cette égalité ne peut définir un polynôme que si $1 + \lambda \in \mathbb{N}$, donc $\lambda \in [[-1, +\infty[[$.

Finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = [[-1, +\infty[[\text{ et } E_\lambda(\varphi) = \{C.X^{1+\lambda}, C \in \mathbb{R}\}}$.

☞ **3** Résoudre l'équation différentielle : $t\,y' - (t+1)y = t^2 - t^3$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.
Retrouver ce résultat en cherchant les solutions DSE.

Réponse : Les intervalles de résolution de l'équation sont $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$,
Résolvons d'abord l'équation homogène associée : $(t^2-1)y' - t\,y = 0$.
En écrivant (au brouillon) : $\boxed{\dfrac{y'}{y} = \dfrac{t+1}{t} = 1 + \dfrac{1}{t} \text{ puis } (\ln|y|)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t + \ln t)}$, on obtient une solution non nulle de l'équation homogène : $u(t) = t\mathrm{e}^t$ sur I_1 et I_2.
Les solutions de l'équation homogène forment une droite vectorielle dirigée par u.
On peut essayer de résoudre l'équation complète par la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution sous la forme $y = C.u$, où C est $\mathscr{C}^1$ sur I_k, $k \in \{1,2,3\}$.
Alors $t\,y' - (t+1)\,y = t(C'\,u + C\,u') - (t+1)\,C\,u = t\,u\,C' + (tC' - (t+1)\,C)u = t\,u\,C'$, donc l'équation complète se ramène à $t^2\mathrm{e}^{-t}C'(t) = t^2 - t^3$, puis $C'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$ sur les deux intervalles.
Une intégration par parties donne une primitive de $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^{-t}$ sous la forme $t\mathrm{e}^{-t}$, correspondant à une solution particulière $y_p : t \mapsto t^2$.
L'ensemble des solutions sur I_k est alors $\boxed{t \mapsto t^2 + C\,t\,\mathrm{e}^t.}$



Posons $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors $y'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,a_n t^n$, $-t\,y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} -a_n t^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_{n-1}\,t\,n$ et $-y(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} -a_n t^n = -a_0 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ donc $t\,y' - (t+1)y = -a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ((n-1)a_n - a_{n-1})\,t^n$, donc l'équation équivaut à $-a_0 = 0, -a_1 - a_0 = 0, a_2 - a_1 = 1, 2a_3 - a_2 = -1$ et $(n-1)a_n - a_{n-1} = 0$ pour $n \geqslant 3$. On trouve a_0, $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = \dfrac{a_1}{2}$ et $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-1}$ pour $n \geqslant 3$ donc $a_n = \dfrac{a_1}{(n-1)!}$ pour $n \geqslant 3$. Finalement $y = t^2 + a_1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(n-1)!} = t^2 + t\mathrm{e}^t$.

** **4** On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $(E) : y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et est une solution de (E).
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $G_\alpha : x \mapsto \sin x \displaystyle\int_\alpha^x \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t - \cos x \int_\alpha^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est solution de (E) ; montrer que $G_\alpha(x) = \displaystyle\int_\alpha^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$.

c) En admettant la convergence de $G : x \mapsto \displaystyle\int_{+\infty}^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$, montrer que G est une solution de (E), et à l'aide d'un changement de variable, que $G(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u+x}\mathrm{d}u$.

d) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $F(x)=G(x)$.

Réponse :

a) Posons $f(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$. Alors $f(\cdot,t): x\mapsto f(x,t)$ est $\mathscr{C}^2$ pour tout t fixé dans $\mathbb{R}_+$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.

Les applications $t\mapsto f(x,t)$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x>0$.

Pour tout $(x,t)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $|f(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui constitue une ***hypothèse de domination*** . Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $b>a>0$, soit $K=[a,b]$; alors $\forall(x,t)\in K\times\mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|=\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{2}$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|=\dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\leqslant\mathrm{e}^{-at}$, ce qui constitue des ***hypothèses de domination*** pour les dérivées partielles.

Ainsi F est $\mathscr{C}^2$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et $F''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ donc

$F''(x)+F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$. $\boxed{F \text{ est solution de } (E): y''+y=\dfrac{1}{x}}$.

b) Puisque $G_\alpha(x)=\sin x\displaystyle\int_\alpha^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t-\cos x\int_\alpha^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, G_α est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$G_\alpha'(x)=\cos x\displaystyle\int_\alpha^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t+\sin x\int_\alpha^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\sin x\frac{\cos x}{x}-\cos x\frac{\sin x}{x}=\cos x\int_\alpha^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t+\sin x\int_\alpha^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

donc

$G_\alpha''(x)=-\sin x\displaystyle\int_\alpha^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t+\cos x\int_\alpha^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\cos x\frac{\sin x}{x}+\sin x\frac{\sin x}{x}=-G_\alpha(x)+\frac{1}{x}$.

$\boxed{G_\alpha \text{ est solution de } (E): y''+y=\dfrac{1}{x}}$.

Comme $\sin(x-t)=\sin x\cos t-\cos x\sin t$, en divisant par t et en intégrant entre α et x : $G_\alpha(x)=\displaystyle\int_\alpha^x\frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$.

c) Puisque $G_\alpha''(x)+G_\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$, la convergence de l'intégrale $G_\alpha(x)$ entraîne celle de $G_\alpha''(x)$, donc de $\displaystyle\int_{+\infty}^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Soit par passage à la limite ($\alpha\to+\infty$), soit par un calcul analogue à celui de la question précédente, $\boxed{G \text{ est une solution de } (E)}$.

Pour x fixé, effectuons alors dans G le changement de variable $u=t-x$, de $[x,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$: $G(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u+x}\mathrm{d}u$.

d) Puisque G est un reste d'intégrale convergente, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$. Puisque G et F sont deux solutions de (E), $G-F$ est solution de l'équation homogène $y''+y=0$, donc il existe deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $G(x)-F(x)=a\cos x+b\sin x$; mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)-F(x)=0$, donc nécessairement $a=b=0$ et $\boxed{G=F}$.

* **5** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0=a_1=1$ et $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.

a) Montrer que $1\leqslant a_n\leqslant n^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$.

b) Montrer que sur $]-R,R[$, la somme $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ vérifie l'équation différentielle

$(1-x)y'-(1+2x)y=0$.

c) En déduire une expression de S à l'aide des fonctions usuelles, puis de a_n comme une somme.

Réponse :

a) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

La propriété est vraie pour $n=1$ et $n=2$, puisque $a_2 = 1 + \frac{2}{2}1 = 2 \leqslant 2^2$.

Supposons la vraie aux rangs n et $n-1$: alors $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 1$, donc $a_{n+1} - (n+1)^2 = a_n - n^2 + \frac{2}{n+1}a_{n-1} - 2n - 1 \leqslant a_n - n^2 + \frac{2}{n+1}\left(2n^2 - 4n + 2 - 2n^2 - 3n - 1\right) \leqslant \frac{2}{n+1}(1-7n) \leqslant 0$.

Donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est intermédiaire entre ceux de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 x^n$, qui valent tous les deux 1. $\boxed{R=1}$.

b) Multiplions par x^{n+1} l'égalité $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$, puis sommons l'égalité obtenue pour $n \geqslant 1$:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n+1} a_{n-1} x^{n+1}$ soit

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n+1} a_{n-1} x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} = f(x) - 1 - x - x(f(x)-1) = (1-x)f(x) - 1$

En dérivant cette égalité sur $]-R,R[$: $2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = (1-x)f'(x) - f(x)$;

or $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} = x f(x)$, donc $\boxed{(2x+1)f(x) = (1-x)f'(x)}$.

c) Sur l'un des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$, $\frac{1+2x}{1-x} = \frac{3-2(1-t)}{1-t} = \frac{3}{1-t} - 2$ donc $\int \frac{1+2x}{1-x}\mathrm{d}x = -3\ln|1-x| - 2x + cte$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$ est une droite vectorielle dirigée par $u(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}$. La seule solution de cette équation qui vérifie $y(0)=1$ est $\boxed{S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}}$.

Comme $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$ et $\mathrm{e}^{-2x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n!}$, donc en utilisant un produit de Cauchy : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\boxed{a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{2\,k!}(n-k+1)(n-k+2).}$

☞ **6** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la série entière $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de S.

b) Montrer que S est solution de l'équation différentielle $y'' - 2\cos\theta\, y' + y = 0$ et en déduire $S(x)$.

Réponse :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\sin(n\theta)}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$. Le rayon de convergence de S est supérieur à celui de $\exp x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc vaut $R = \infty$.

b) S est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $S''(x) - 2\cos\theta\, S'(x) + S(x)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}\sin(n\theta)x^{n-2} - 2\cos\theta \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!}\sin(n\theta)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{(n-2)!}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cos\theta\sin(n\theta)}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{(n-2)!}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cos\theta\sin(n\theta)}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n
\end{aligned}$$

Réponse : $S''(x)-2\cos\theta\, S'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sin((n+2)\theta)+\sin(n\theta)-2\cos\theta\sin((n+1)\theta)\right)\frac{x^n}{n!}$.

c) Or $\sin((p+1)\theta)+\sin((p-1)\theta)=2\cos\theta\sin(p\theta)$ donc finalement $\boxed{S''(x)-2\cos\theta\, S'(x)+S(x)=0}$.

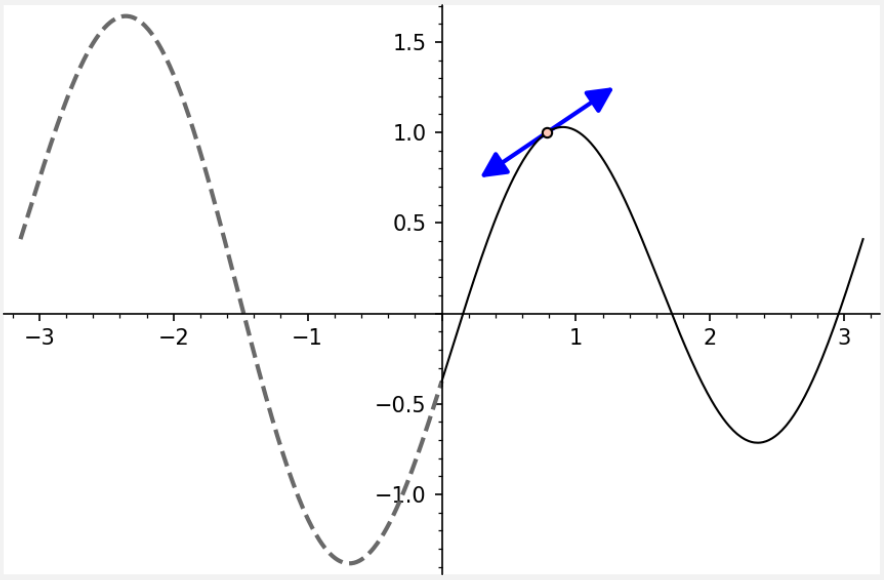
L'équation caractéristique de $y''-2\cos\theta\, y'+y=0$, $r^2-2\cos\theta\, r+1=0$, a pour racines $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$. Donc les solutions de l'équation forment le plan vectoriel $\lambda\exp(x\mathrm{e}^{i\theta})+\mu\exp(x\mathrm{e}^{-i\theta})$ sur $\mathbb{C}$, avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ soit (en prenant $\mu=\overline{\lambda}$) : $\mathrm{e}^{x\cos\theta}(A\cos(x\sin\theta)+B\sin(x\sin\theta))$.

Les conditions initiales $S(0)=0$, $S'(0)=\sin\theta$ donnent $\lambda=-\mu$ et $\mathrm{e}^{i\theta}\lambda+\mathrm{e}^{-i\theta}\mu=\sin\theta$ soit $\lambda=\overline{\mu}=\frac{-i}{2}$,

et finalement : $\boxed{S(x)=\mathrm{e}^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)}$.

☞ **7** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a\neq 0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y''+4y=a|t|+b$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Montrer que, pour des conditions initiales $y(t_0)=v_0, y'(t_0)=d_0$, il existe une seule solution de (E) qui vérifie ces conditions initiales et qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Réponse : L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y''+4y=0$ est un plan vectoriel $(t\mapsto\cos(2t), t\mapsto\sin(2t))$.
$y''+4y=1$ a une solution constante $\frac{1}{4}$, et $y''+4y=t$ a une solution polynomiale de degré 1 : $\frac{t}{4}$.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, $y''+4y=a|t|+b$ qui s'écrit $y''+4y=a\,t+b$ admet pour solution particulière $\frac{at+b}{4}$ (principe de superposition des solutions); l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $A_d\cos(2t)+B_d\sin(2t)+\frac{at+b}{4}$, $(A_d,B_d)\in\mathbb{R}^2$.
sur $\mathbb{R}_-^*$, $y''+4y=a|t|+b$ qui s'écrit $y''-4y=-a\,t+b$ admet pour solution particulière $\frac{at+b}{4}$; l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ est donc $A_g\cos(2t)+B_g\sin(2t)+\frac{-at+b}{4}$, $(A_g,B_g)\in\mathbb{R}^2$.
Par comparaison des deux développements limités :
$A_d\cos(2t)+B_d\sin(2t)-\frac{at+b}{4}=\left(A_d-\frac{b}{4}\right)+\left(2B_d-\frac{a}{4}\right)-2A_dt^2+o(t^2)$ (pour $t>0$) et
$A_g\cos(2t)+B_g.\sin(2t)+\frac{at-b}{4}=\left(A_g-\frac{b}{4}\right)+\left(2B_g+\frac{a}{4}\right)-2A_gt^2+o(t^2)$ (pour $t<0$).
on trouve une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: $A_d=A_g$ et $2B_d-\frac{a}{4}=2B_g+\frac{a}{4}$, soit $A_d=A_g$ et $B_d-B_g=\frac{a}{4}$.
Les conditions initiales permettent de fixer le couple (A_d,B_d) si $t_0>0$ et (A_g,B_g) si $t_0<0$, ce qui aboutit à une solution unique de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.



☞ **8** Déterminer les solutions développables en série entière de (E_9) : $t(1-t)y''+t\,y'-y=0$, ainsi que leur rayon de convergence.
Existe-t-il d'autres solutions de (E_9) ? Achever la résolution de (E_9).

Réponse : On résout bien sûr (E) sur $]-\infty,0[$, ou $]0,1[$, ou encore $]1,+\infty[$.
Avec $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$, $y'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^{n-1}$, donc $t\,y'(t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}-na_nt^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^n$,
$y''(t)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$ et enfin
$-t^2y''(t)=-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n=\sum_{n=2}^{+\infty}-n(n-1)a_nt^n$.
$t(1-t)y''+t\,y'-y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1+n-n(n-1))\,a_n+n(n+1)a_{n+1}\right)t^n$ puis
$t(1-t)y''+t\,y'-y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-(n-1)^2a_n+n(n+1)a_{n+1}\right)$, donc l'équation différentielle équivaut à $a_0=0$ et $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=\dfrac{-(n-1)^2}{n(n+1)}a_n}$.
En particulier, avec $n=1$, on trouve $a_2=0$ donc par récurrence sur $n\geqslant 2$: $a_n=0$. Les solutions somme de séries entières sont donc des polynômes de degré $\leqslant 1$, et de rayon de convergence infini. On trouve que les solutions DSE sont $\boxed{\text{multiples de } u : t\mapsto t.}$
Comme l'ensemble des $\mathscr{S}$ de solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2, il y a une infinité de solutions dans $\mathscr{S}\setminus\mathrm{Vect}(u)$.
Pour les trouver, posons $y(t)=t\,z(t)$: $y'(t)=t\,z'(t)+z(t)$ et $y''(t)=t\,z''(t)+2z'(t)$, donc

$$\begin{aligned} t(1-t)y''(t)+t\,y'(t)-y(t) &= t^2z''(t)+2t\,z'(t)-t^3z''(t)+2t^2z'(t)+t^2\,z'(t)+t\,z'(t)-t\,z(t)\\ &= t^2(1-t)z''(t)+t(2-t)z'(t)\end{aligned}$$

En posant $\omega(t)=z'(t)$, on est ramené à l'équation linéaire homogène du premier ordre $t(1-t)\omega'(t)+(2-t)\omega(t)=0$.
Comme $\displaystyle\int\frac{t-2}{t(1-t)}\mathrm{d}t=\int\frac{-2}{t}-\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-2\ln t+\ln|1-t|$, on trouve que $\omega(t)=C_1\dfrac{1-t}{t^2}$, donc $z(t)=C_1\left(\dfrac{-1}{t}-\ln|t|\right)+C_2$, et finalement $\boxed{y(t)=t\,z(t)=C_2\,t-C_1(1+t\ln|t|).}$

∗∗ **9** Soit v une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $(uv)''=u''v''$ avec $u(t)=t^p$, $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$.
Expliciter l'équation différentielle vérifiée par v et en chercher les solutions développables en série entière.
Obtient-on ainsi toutes les solutions ?

Réponse : $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$. En particulier, avec $u(t) = t^p$:
$(uv)''(t) = p(p-1)t^{p-2}v(t) + 2pt^{p-1}v'(t) + t^p v''(t) = t^{p-2}\big(p(p-1)v(t) + 2pt\,v'(t) + t^2v''(t)\big)$; donc $(uv)''(t) - u''(t)v''(t) = t^{p-2}\big(p(p-1)v(t) + 2pt\,v'(t) + (t^2 - p(p-1))v''(t)\big)$.
L'équation $(uv)'' = u''v''$ équivaut donc à $(F) : p(p-1)v(t) + 2pt\,v'(t) + (t^2 - p(p-1))v''(t) = 0$.
Posons $v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors $p(p-1)v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(p-1)a_n t^n$;
$2pt\,v'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2pna_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2pna_n t^n$.
$t^2v''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$
$-p(p-1)v''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} -p(p-1)n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} -p(p-1)(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$, donc finalement $p(p-1)v(t) + 2pt\,v'(t) + (t^2 - p(p-1))v''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big((p(p-1) + 2pn + n(n-1))\,a_n - p(p-1)(n+1)(n+2)a_{n+2}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(((n+p)(n+p-1))\,a_n - p(p-1)(n+1)(n+2)a_{n+2}\big)$.
Alors l'équation (F) équivaut à $a_{n+2} = \dfrac{(n+p)(n+p-1)}{p(p-1)(n+1)(n+2)}a_n$.
Il en résulte que l'ensemble des solutions DSE de (F) est un plan vectoriel, engendré par
⋆ : u paire, obtenue avec $(a_0, a_1) = (1, 0)$ (donc $a_{2p+1} = 0$ par récurrence);
⋆ : v impaire, obtenue avec $(a_0, a_1) = (0, 1)$ (donc $a_{2p} = 0$ par récurrence).
Pour chacune de ces séries entières, $\dfrac{a_{n+2}z^{n+2}}{a_n z^n} = \dfrac{(n+p)(n+p-1)}{n(n-1)}\dfrac{z^2}{p(p-1)} \sim \dfrac{z^2}{p(p-1)}$, donc en utilisant le critère de d'Alembert, le rayon de convergence des séries définissant u et v est $\sqrt{p(p-1)}$.
Il est possible d'obtenir un expression générique des coefficients de u et v à l'aide de factorielles, mais ce n'est pas demandé et peut-être pas utile.
Comme l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2, il est identique à l'espace vectoriel de toutes les solutions, donc $\boxed{\text{les solutions de } (F) \text{ sont toutes DSE}}$.

* **10** **a)** Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation $(E) : (1-t^2)y'' - 3t\,y' - y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, sachant que $y_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est solution de l'équation sans second membre.

b) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène $(E_h) : (1-t^2)y'' - 3t\,y' - y = 0$, et en déduire un développement en série entière de $\dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

Réponse :

a) méthode d'abaissement du degré : si $y_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, alors $y_1'(t) = -\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}^3} = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}^3}$ et $y_1''(t) = \dfrac{1}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(\dfrac{-3}{2}\right)(-2t)t + 1 - t^2\right) = \dfrac{1+2t^2}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}$, donc

$(1-t^2)y_1''(t) - 3ty'(t) - y_1(t) = \left(1-t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1+2t^2-3t^2-(1-t^2)\right) = 0.$

Posons $y = y_1 z$, alors $y' = y_1'z + y_1 z'$, et $y'' = y_1''z + 2y' - 1z' + y_1 z''$; alors $(1-t^2)y'' - 3ty' - y = (1-t^2)y_1 z'' + (2(1-t^2)y' - 1 - 3ty_1)z' + 0z = \sqrt{1-t^2}z'' + \left(\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{3t}{\sqrt{1-t^2}}\right)z' = 0.$

Finalement l'équation (E_h), équation homogène associée à (E), devient $((1-t^2)z'' - tz' = 0$. En posant $\omega = z'$, l'équation homogène se ramène à $(1-t^2)\omega' - t\omega = 0$. Comme $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$, donc $\omega(t) = \dfrac{C_2}{\sqrt{1-t^2}}$, puis $z(t) = C_2 \arcsin(t) + C_1$ et enfin

$\boxed{y(t) = \dfrac{C_1}{\sqrt{1-t^2}} + C_2\dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}.}$

L'équation (E), elle, se ramène à $\sqrt{1-t^2}(z'' - \dfrac{t}{1-t^2}z') = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ puis $\omega' - \dfrac{t}{1-t^2}\omega = \dfrac{t}{1-t^2}$.

Plutôt que d'avoir recours à la méthode de variation de la constante, remarquons que $\omega_0 = cte = -1$ est une solution particulière de cette équation, ce qui amène $z_0(t) = -t$ puis $y_0(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$.

La méthode de variation de la constante consiste alors à poser $\omega(t) = \dfrac{k(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, donc l'équation devient $\sqrt{1-t^2}k'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, soit $k'(t) = \dfrac{-1}{2}\dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}^3}$. On obtient alors $k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} + C_1$, donc $\omega(t) = \arcsin t + \dfrac{C_1}{\sqrt{1-t^2}}$ puis $z(t) = \sqrt{1-t^2} + t\arcsin t + C_1 \arcsin t + C_2$;

Finalement $\boxed{y(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} + C_1\dfrac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} + \dfrac{C_2}{\sqrt{1-t^2}}.}$

b) recherche de solutions somme de série entière : Soit $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors

$$\begin{array}{rcccl}
-y(t) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -a_n t^n & & \\
-3ty'(t) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -3na_n t^n & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -3na_n t^n \\
-t^2y''(t) & = & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1)a_n t^n & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -n(n-1)a_n t^n \\
y''(t) & = & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} & = & \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} t^m
\end{array} \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned}
(1-t^2)y'' - 3ty' - y &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - 3n - 1)\,a_n\right)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)^2\,a_n\right)t^n.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de (E_h) vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}a_n$.

La solution impaire telle que $a_1 = 1$ (et $a_0 = 0$) est d'après la question **a)** $t \mapsto \dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$; elle admet un développement en série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}t^{2n+1}$, avec $\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \dfrac{2p}{2p+1}$ pour $p \geqslant 1$, donc $\displaystyle\prod_{p=1}^{n}\frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \prod_{p=1}^{n}\frac{2p}{2p+1}$ puis $\dfrac{a_{2n+1}}{a_1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. Finalement $\boxed{\dfrac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.}$

* **11** Résoudre $4(1-x^2)y''-4xy'+y=0$ sur $]-1,1[$ en utilisant un changement de variable $x=\sin t$.

Indication : Exprimer $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de $\cos(t), \sin(t)$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ et écrire l'équation différentielle en fonction de la variable t et de l'expression y (en fait $y(x)$).

En déduire que les fonctions $x\mapsto \cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$ et $x\mapsto \sin\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$ sont développables en série entière sur $]-1;1[$.

Réponse : Avec $x=\sin(t)$, $dx=\cos(t)dt$ donc $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos(t)}$.

Alors $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\cos(t)}\dfrac{dy}{dt}$, et

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{\cos(t)}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{\cos(t)}\left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos(t)}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos^2(t)}\frac{d^2y}{dt^2}$$

donc $4(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+y=\cos^2(t)\left(\dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{\cos^2(t)}\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)+\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}\dfrac{dy}{dt}+y=4\dfrac{d^2y}{dt^2}+y.$

Donc les solutions de E sur $]-1,1[$ sont

$$y=A\cos\frac{t}{2}+B\sin\frac{t}{2}=\boxed{A\cos\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\arcsin x}{2}\right),\ (A,B)\in\mathbb{R}^2.}$$

Cherchons les solutions de (E) sous la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. On trouve sur $]-R,R[$: $-4xy'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-4na_nx^n$, $-4x^2y''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-4n(n-1)a_nx^n$, et $4y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}4n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{m=0}^{+\infty}4(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$; alors $4(1-x^2)y''-4xy'+y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4(n+2)(n+1)a_{n+2}+(1-4n+4n-4n^2)a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4(n+2)(n+1)a_{n+2}+(1-2n)(1+2n)a_n\right)x^n$.

On en déduit que $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est solution de $4(1-x^2)y''-4xy'+y=0$ si et seulement si, $\forall n\in\mathbb{N}$, $4(n+1)(n+2)a_{n+2}=(2n-1)(2n+1)a_n$.

$(a_0,a_1)=(1,0)$ définit donc une solution de $4(1-x^2)y''-4xy'+y=0$ sous forme de série entière paire (avec $y(0)=1$); de même, $(a_0,a_1)=(0,1)$ définit une solution de $4(1-x^2)y''-4xy'+y=0$ sous forme de série entière impaire (avec $y'(0)=1$). Puisque $\dfrac{a_{m+2}x^{2m+2}}{a_mx^{2m}}=\dfrac{4n^2-1}{4(n+1(n+2)}x^2\sim x^2$, le critère de d'Alembert donne pour les deux séries un rayon de convergence égal à 1.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut identifier sur $]-1;1[$ les sommes de ces deux séries avec les fonctions $x\mapsto\cos\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$ et $x\mapsto\sin\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\right)$

* **12** On considère l'équation différentielle $4ty''+2y'-y=0$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$ soit une solution de (E).

Déterminer une solution u de (E) développable en série entière, telle que $u(0)=1$.

On fournira une expression explicite de $u(t)$ pour $t\geqslant 0$, et une expression pour $t\geqslant 0$.

Toutes les solutions de (E) sont-elles développables en série entière?

b) Pour $t>0$, montrer que $y(t)=\operatorname{ch}\left(\sqrt{t}\right)z(t)$ est solution de (E) si, et seulement si, z' est solution d'une équation du premier degré que l'on précisera.

c) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du changement de variable $t=x^2$.

Réponse :

a) Si $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ (série entière de rayon de convergence R, alors pour $t \in]-R;R[$: $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} t^p$ en posant $p = n-1$, et $y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$ donc $4t y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4n(n-1) a_n t^{n-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} 4p(p+1) a_{p+1} t^p$, donc $4t y'' + 2y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1)a_{n+1} + 4n(n+1)a_{n+1} - a_n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+1)(2n+2)a_{n+1} - a_n) t^n$.

L'équation (E) est donc équivalente à la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n$, ce qui donne par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$.

Avec la condition initiale $a_0 = 1$, on trouve alors $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}$ (avec un rayon de convergence infini).

Pour $t \geqslant 0$, un changement de variable $t = x^2$ donne $u(t) = \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{t})$; pour $t \leqslant 0$, $t = -x^2$ donne $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x = \cos \sqrt{-t}$.

L'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est une droite vectorielle, donc strictement incluse dans le plan vectoriel des solutions de (E).

b) Remarquons que $y(t) = u(t)z(t)$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' = u'z + uz'$ et $y'' = u''z + 2u'z' + 2uz''$; ainsi $4y'' + 2y' - y = 4t\,u\,z'' + (8t\,u' + 2u)z' + (4u'' + 2u' - u)z = 4t\,u\,z'' + (8t\,u' + 2u)z'$.

Or $u'(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{2\sqrt{t}}$, donc l'équation (E) se ramène à $\boxed{2t\operatorname{ch}(\sqrt{t})\omega' + (\operatorname{ch}(\sqrt{t}) + 2t\sqrt{t}\operatorname{sh}(\sqrt{t}))\omega = 0}$ en prenant $z' = \omega$.

c) Avec le changement $t = x^2$: $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, puis
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{-1}{2x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)$; donc
$4t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 4x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, donc $4t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - y$, donc l'équation (E) devient $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - y = 0$, dont les solutions sont $A\cos ch(x) + B\operatorname{sh}(x)$ soit sur $\mathbb{R}_+$: $\boxed{t \mapsto A\cos ch(\sqrt{t}) + B\operatorname{sh}(\sqrt{t}), \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2}$.

On retrouve la solution u, complétée par $v : t \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{t})$, qui n'est pas DSE en 0.