PT exercices sur les variables aléatoires 2024/2025

feuille N° 11

☞ **1** Soit N le nombre de visiteurs d'un parc par jour. N suit une loi de Poisson de paramètre 4000. Le parc possède 4 entrées et chaque visiteur se dirige vers une entrée indépendamment des autres visiteurs. Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes empruntant l'entrée 1 chaque jour.

a) Donner le nombre moyen de visiteurs empruntant les entrées du parc chaque jour.
b) Donner la loi de probabilité de X.

∗ **2** **a)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{G}_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^\alpha}$.
b) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant (\lambda+1)\alpha) \leqslant \dfrac{2}{\alpha\lambda^2}$.

☞ **3** Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

☞ **4** Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Calculer l'espérance de $Y = X^2+1$. Calculer $\mathbb{P}(2X < Y)$.
b) Calculer la probabilité que X soit pair ; y a-t-il plus de chances que X soit impair ?

☞ **5** X est une variable aléatoire sur un univers Ω vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $\exists \alpha \in]0,1[, \mathbb{P}(X = n) = \alpha \mathbb{P}(X > n)$; déterminer la loi de X.

∗ **6** En un an, une esturgeonne pond N œufs, où N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Chaque œuf éclot avec une probabilité p, donnant naissance à un alevin. Les éclosions successives sont des événements indépendants.
On note K la variable aléatoire donnant le nombre d'alevins.
Reconnaître la loi de K.

∗ **7** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie. On pose $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, $r_n = \mathbb{P}(X > n)$ et on note $\mathbb{G}_X$ la fonction génératrice de X.

a) Quelle relation a-t-on entre la série $\sum p_n$ et la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
b) On considère la série entière $\sum r_n t^n$. Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
c) Pour $|t| < 1$, on pose $H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$. Montrer que $H(t) = \dfrac{1-\mathbb{G}_X(t)}{1-t}$.

∗ **8** On considère trois urnes et n boules, $n \in \mathbb{N}^*$. Les boules sont lancées de manière équiprobable dans les trois urnes. On note X_n le nombre d'urnes avec au moins une boule.

a) Déterminer la loi de X_n.
b) Calculer l'espérance de X_n.

∗∗ **9** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p telle que $Z = X+Y+1$.
a) Trouver l'espérance et la variance de X.
b) Calculer $\mathbb{G}_X(t)$.
c) Trouver la loi de X.

☞ **10** Soit $a \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire de fonction génératrice $\mathbb{G}_X(t) = a e^{t^2}$.

a) Déterminer a.
b) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

---

* **11** Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ $n \geqslant 3$ variables aléatoires telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad X_k \sim \mathscr{B}(p_k)$.
Déterminer les lois des variables aléatoires suivantes :

$$Y = \prod_{k=1}^{n} X_k, \qquad W = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \qquad \text{et} \qquad Z = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} (X_{k+1} - X_k)$$

---

* **12**

a) En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $P = (1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) Deux joueurs jouent indépendamment n parties de Pile ou Face avec des pièces équilibrées. Quelle est la probabilité p_n pour qu'ils obtiennent le même de nombre de fois Face ?

c) On remarque que p_n est aussi la probabilité d'obtenir n fois Face lors de $2n$ lancers. Pouvait-on s'en douter ?

d) Donner une expression de p_n.

---

* **13** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une matrice de projecteur.

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, soit $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

c) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

d) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

---

* **14** Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p.
Pour $Y = \dfrac{1}{X}$, donner $Y(\Omega)$ et la loi de Y.
Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad Y^m$ est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

** **15** **Loi binomiale négative**

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour $x \in]-1,1[$,
$\displaystyle\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m-1}{n-1} x^{m-n}$.

On répète indéfiniment des expériences de Bernoulli indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$. n étant un entier naturel fixé, on appelle X la variable aléatoire renvoyant le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir n succès (et $X_n - n$ échecs).

On admet que, pour $m \in \mathbb{N}, m \geqslant n$: $\mathbb{P}(X = m) = \displaystyle\binom{m-1}{n-1} p^n q^{m-n}$.

b) Déterminer la série génératrice de X, ainsi que son rayon de convergence.

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

d) À Macholand, le divorce (pour les femmes) et la contraception sont interdits, et tout père de famille doit avoir trois fils, sous peine d'une forte amende.

Combien d'enfants a en moyenne un père de famille Macholandais ? (On suppose que la naissance d'une fille et d'un garçon sont équiprobables).