PT **exercices sur les probabilités** **2024/2025**

feuille N° 10

☞ **1** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A et B deux évènements de $\mathscr{A}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$.
Montrer que $\mathbb{P}(A|B) \geqslant \mathbb{P}(A) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(B|A) \geqslant \mathbb{P}(B)$.

———— • ————

☞ **2** 10% des pièces d'une production sont mauvaises ; on leur fait passer un test qui permet d'accepter 90% des bonnes pièces et de retirer 90% des mauvaises.

a) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?
b) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne bien qu'elle ne soit pas acceptée ?
c) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise bien qu'elle soit acceptée ?
d) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur ?

———— • ————

☞ **3** On lance deux dés cubiques parfaits (un rouge et un noir). On considère les évènements
A : « *un seul des dés marque 1* » ; B : « *la somme des points des deux dés vaut 7* » ; A' : « *le dé rouge marque 1* ».
Montrer que A et B ne sont pas indépendants, alors que A' et B le sont.

———— • ————

☞ **4** Sur l'île norvégienne de Hvidkatt, 25% des chats sont porteurs du gène W, gène dominant qui se manifeste toujours par une robe entièrement blanche et, dans 50% des cas, par une surdité latérale ou bilatérale.

De plus, un tiers des chats de Hvidkatt sont de la race *snøball*, indemne du gène W, mais de robe toute blanche. Les snøball ne sont pas sourds, et très prisés pour leur habileté à chasser dans la neige les souris blanches échappées des laboratoires.

Les chats qui ne sont ni porteurs du gène W ni snøball ne sont ni entièrement blancs, ni sourds.

On amène au docteur Vilde Dyrlege, la vétérinaire de Hvidkatt, un chat blanc en lui demandant la probabilité que ce soit un authentique snøball, et la probabilité que le chat soit sourd. Que doit elle répondre ? (On suppose que Vilde n'a pas l'idée de secouer un sac de croquettes dans la pièce voisine).

———— • ————

* **5** Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires, et la seconde 4 blanches et 3 noires. On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1, sinon dans l'urne 2.
Soit l'événement : B_n :« *tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage* », et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a) Calculer p_1.
b) Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
c) Calculer p_n en fonction de n.

———— • ————

* **6** Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une fois et atteint toujours sa cible. Mais plusieurs chasseurs peuvent viser le même canard…

a) Quelle est la probabilité p_n pour qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
Indication : Le tir groupé définit une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Est-elle injective ?
b) L'un des canards s'appelle Pataud. Quelle est la probabilité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

———— • ————

* **7** Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (resp. 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$, (resp. $p_2 \in]0,1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

a) Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
b) Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
c) Pour quelles valeurs de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

∗ **8** Trois footballeuses Ava, Béa et Clara, jouent ensemble. Ava envoie le ballon à Béa avec une probabilité de 0.75, et à Clara avec une probabilité de 0.25; Béa envoie toujours le ballon à Clara; Clara envoie le ballon à Ava avec une probabilité de 0.25, et à Béa avec une probabilité de 0.75.

On note A_n l'évènement « *Ava contrôle le ballon à l'issue du* $n^{\text{ème}}$ *lancer* » et on considère de même B_n et C_n. On note a_n la probabilité de l'évènement A_n, et on note de même b_n et c_n.

a) Donner a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1}.

b) Montrer que $\exists M \in M_3(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer M.

c) Déterminer la limite de a_n, b_n, c_n, quand $n \to +\infty$.

———— • ————

∗ **9** On dispose d'un dé et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête. On souhaite déterminer la probabilité d'obtenir la boule blanche.

On note A_k l'évènement : « *On a obtenu le premier six au* $k^{\text{ème}}$ *lancer du dé* ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ et vérifier que le jeu s'arrête presque sûrement.

b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

———— • ————

∗∗ **10** On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur Pile est p. On note A_n l'évènement : « *au* $n^{\text{ème}}$ *lancer, on obtient pour la première fois deux Pile consécutifs* ». On note a_n la probabilité de cet évènement.

a) Calculer a_1, a_2, a_3.

b) Montrer que $a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$. Indications : appeler Π_n et F_n les évènements « *on obtient Pile au* $n^{\text{ème}}$ *lancer* » et $F_n = \overline{\Pi_n}$; puis appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements F_1, $\Pi_1 \cap F_2$ et $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

c) En déduire qu'il existe deux couples de réels (r_1, r_2) et (α, β) tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n$.

Montrer que $r_1 + r_2 = 1-p$, $r_1 r_2 = -p(1-p)$, $\alpha\, r_1 + \beta\, r_2 = 0$ et $\alpha + \beta = \dfrac{p}{1-p}$.

d) Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux Pile consécutifs ?

———— • ————

∗∗ **11** On suppose que la probabilité p_n pour qu'un couple ait exactement n enfants est de la forme $p_n = \alpha q^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in]0,1[$.

a) Que vaut p_0 ? Quelle condition doit-on imposer à α et à q ?

b) Soit k un entier naturel. En utilisant le cours sur les séries entières, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$, où x est un réel tel que $|x| < 1$.

c) Les naissances d'une fille et d'un garçon étant supposées équiprobables, quelle est la probabilité pour qu'un couple ait exactement k filles ?

exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
indépendance/conditionnement	X	X	X	X	X						
probas totales					X			X	X	X	X
récurrence					X		X	X	X	X	X
probas composées									X	?	
divers						cardinaux		matrices			séries