

PT

Exercices sur les intégrales à paramètre

2024/2025

feuille N° 9

-  **1** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$; on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^n + x^n}$.
- a) Montrer que $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.
- b) Effectuer dans l'intégrale $F_1(x)$ le changement de variable $t = xu$; en déduire que $F_1(x) = x^{1-n} I_n$.
Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_1(x)$?
-  **2** Soit la fonction définie par $F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan t}{t} dt$;
- a) Montrer que cette fonction est définie pour $x > 0$.
Indications : en 0, chercher un équivalent de $\arctan(xt) - \arctan t$ quand t tend vers 0;
en $+\infty$, utiliser $\arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} - \arctan u$.
- b) Étudier la dérivabilité de F_2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et le signe de $F_2(x)$ pour $x > 0$.
- c) Calculer $F_2'(x)$ puis $F_2(x)$ pour $x > 0$ à l'aide des fonctions usuelles.
-  **3** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_3(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt$.
- a) Montrer que F_3 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_3(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_3'(x) - F_3(x) = -\frac{1}{x}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_3(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
- c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xF_3(x) = 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} dt$ et en déduire un équivalent de $F_3(x)$ en $+\infty$.
- 4** On considère les fonctions définies par $f_4(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}$ et $F_4(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}$.
- a) En remarquant que $0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq 1$ pour tous $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, montrer l'existence de $F_4(x)$ pour tout réel x .
Montrer que F_4 est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer l'existence de l'intégrale $A = \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|}{1+t^2} dt$.
Montrer que F_4 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $F_4'(x)$ comme une intégrale.
Indication : on pourra utiliser les inégalités $0 \leq \frac{t^x}{1+t^x} \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq 1$, et la convergence de A .
- c) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, trouver une expression simple de $F_4'(x)$. En déduire la valeur des intégrales $F_4(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ et $F_4(\pi) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)}$.
-  **5** Soit f_5 la fonction définie par $f_5(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$, et $F_5(x) = \int_0^{+\infty} f_5(x, t) dt$.
- a) Montrer que F_5 est définie et impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_5 est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que $\frac{\partial f_5}{\partial x} = \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2} \right)$.
À l'aide de l'inégalité $0 \leq \frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}$, montrer que pour $t > 0$, $0 \leq \frac{\partial f_5}{\partial x} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{2(1+t^2)}$.
Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $F_5'(x)$ pour $x > 0$ comme une intégrale, puis sans symbole intégrale.
- c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_5(x) = \int_0^x \frac{\ln|u|}{1-u^2} du$.
En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln|u|}{1-u^2} du = \frac{\pi^2}{8}$.

☞ **6** Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$ converge et vaut $\frac{-1}{(2k+1)^2}$.

En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln |u|}{1-u^2} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2}$.

☞ **7** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

a) Montrer que H est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Calculer $H'(x)$ et $G'(x)$ pour $x > 0$. (on exprimera $G'(x)$ sous forme d'une intégrale).

b) Montrer que $G + H^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, constante que l'on déterminera.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$, et en déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

* **8** Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on considère la fonction F_8 définie par $F_8(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F_8 .

b) À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_8(x) = 0$.

c) Montrer que F_8 est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $F_8'(x)$ comme une intégrale.

d) En déduire une expression explicite de $F_8'(x)$, puis de $F_8(x)$.

* **9** **a)** Montrer la convergence, pour $x \in \mathbb{R}^*$, de $F_9(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

b) Si $x > 0$, effectuer le changement de variable $t = x \cdot u$ dans $F_9(x)$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_9(x) = G(x) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}.$$

Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$, paire, monotone sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = 0$.

c) Montrer que F_9 admet une limite en $+\infty$, et en 0, et préciser ces limites.