PT Exercices sur les intégrales à paramètre (solutions) 2024/2025

☞ **1** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$; on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F_1(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^n+x^n}$.

a) Montrer que $0\leqslant 1-I_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

b) Effectuer dans l'intégrale $F_1(x)$ le changement de variable $t=x\,u$; en déduire que $F_1(x)=x^{1-n}\,I_n$.
Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}F_1(x)$?

Réponse :

a) $1-I_n=\displaystyle\int_0^1 1-\frac{1}{1+u^n}\mathrm{d}u=\int_0^1 1-\frac{1}{1+u^n}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u^n}{1+u^n}\mathrm{d}u$.

Comme $0\leqslant\dfrac{u^n}{1+u^n}\leqslant u^n$, par intégration : $\boxed{0\leqslant 1-I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1 u^n\mathrm{d}u=\frac{1}{n+1}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-I_n=0$ (théorème d'encadrement) : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=1}$.

b) Le changement de variable linéaire $t=x\,u$ transforme l'intervalle $[0,x]$ en $[0,1]$, et $\mathrm{d}t=x\mathrm{d}u$ donc $F_1(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^n+x^n\,u^n}\mathrm{d}u=\frac{x}{x^n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$ donc $\boxed{F_1(x)=x^{1-n}I_n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=1$, $F_1(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}x^{1-n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>1\\ 1 & \text{si } x=1\\ +\infty & \text{si } 0\leqslant x<1\end{cases}$

☞ **2** Soit la fonction définie par $F_2(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)-\arctan t}{t}\mathrm{d}t$;

a) Montrer que cette fonction est définie pour $x>0$.
Indications : en 0, chercher un équivalent de $\arctan(xt)-\arctan t$ quand t tend vers 0 ;
en $+\infty$, utiliser $\arctan\dfrac{1}{u}=\dfrac{\pi}{2}-\arctan u$.

b) Étudier la dérivabilité de F_2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et le signe de $F_2(x)$ pour $x>0$.

c) Calculer $F_2'(x)$ puis $F_2(x)$ pour $x>0$ à l'aide des fonctions usuelles.

Réponse :

a) Il s'agit de montrer la convergence de l'intégrale $F_2(x)$ pour $x>0$.

Pour $x>0$, $g_x : t\mapsto\dfrac{\arctan(xt)-\arctan t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty$, et de signe constant, égale à celui de $x-1$; on peut remarquer que $g_1=0$.

De plus, $g_x(t)=\dfrac{xt+o_{t\to0}(t)-(t+o_{t\to0}(t))}{t}=\dfrac{(x-1)t+o_{t\to0}(t)}{t}=x-1+o_{t\to0}(1)$, donc g_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $g_x(0)=x-1$: g_x est intégrable sur $]0,1]$.

Enfin, en utilisant l'identité $\arctan u=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{u}$ (pour $u>0$) :

$g_x(t)=\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{xt}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{t}\right)\right)=\dfrac{1}{t}\left(\arctan\dfrac{1}{t}-\arctan\dfrac{1}{xt}\right)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{x-1}{xt^2}$ d'après le calcul précédent.

Comme $g_x(t)=\mathcal{O}_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, g_x est intégrable sur $[1,+\infty[$.

b) Pour tout $t>0$, $x\mapsto g_x(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\arctan(xt)-\arctan t}{t}\right)=\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{t}{1+x^2t^2}\right)=\dfrac{1}{1+x^2t^2}$, qui est clairement continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

$\sup\limits_{x>0}\left|\dfrac{\partial g_x(t)}{\partial x}\right|=1$, ce qui sonne le glas de toute ***hypothèse de domination*** sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cependant, soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$: $b>a>0$, alors $\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|\dfrac{\partial g_x(t)}{\partial x}\right|=g_a(t)=\dfrac{1}{1+a^2t^2}$, fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: ***hypothèse de domination*** sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : F_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, F_2'(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2}.}$

Enfin, comme arctan est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\arctan(xt) - \arctan(t)$ a le signe de $x-1$, donc par intégration $F_2(x)$ a le signe de $x-1$.

c) Un changement de variable linéaire et strictement croissant $u = x\,t$ donne, pour $x > 0$:

$$F_2'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}[\arctan(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x},$$

puis, en tenant compte de la valeur $F_2(1) = 0$: $\boxed{F_2(x) = \frac{\pi}{2}\ln x.}$

☞ **3** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_3(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F_3 est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_3(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_3'(x) - F_3(x) = \frac{-1}{x}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F_3(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xF_3(x) = 1 - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire un équivalent de $F_3(x)$ en $+\infty$.

Réponse :

a) $f_3(x,\cdot) : t \mapsto f_3(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et $f_3(\cdot,t) : x \mapsto f_3(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

De plus, si $x > 0$, alors $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$ donc $f_3(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $b > a > 0$, alors $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, et $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: ceci constitue une ***hypothèse de domination*** pour f_3 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $f_3(\cdot,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}\right) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}$;

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $b > a > 0$, alors $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad 0 \leqslant \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$, et $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: ceci constitue une ***hypothèse de domination*** pour $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{F_3 \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } F_3'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$

b) Pour $t \geqslant 0$ et $x > 0$, $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$ donc par intégration $0 \leqslant F_3(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$. Le théorème d'encadrement permet d'en déduire que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F_3(x) = 0.}$

D'après le calcul plus haut, $F_3'(x) - F_3(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t} - \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{x}$ pour $x > 0$.

$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est positive et un $o_{+\infty}(\mathrm{e}^{-t})$, donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = \varphi(x) - \frac{1}{x}$ donc φ est une solution de $y' - y = \frac{-1}{x}$.

Réponse :

De plus, comme $0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ pour $t \geqslant x$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant e^x \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

On peut donc identifier F_3 et φ comme unique solution de $y' - y = \frac{-1}{x}$ qui admet une solution finie en $+\infty$.

c) Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = xe^{-xt} \\ v(t) = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$; $\begin{cases} u'(t) = -e^{-xt} \\ v(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2} \end{cases}$.

Comme $uv(t) = \frac{-e^{-xt}}{1+t}$ admet une limite (nulle) en $+\infty$, on peut écrire que

$xF_3(x) = \int_0^{+\infty} u'v(t)\,dt = [\frac{-e^{-xt}}{1+t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} uv(t)\,dt = 1 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,dt$.

Comme $0 \leqslant \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2} \leqslant \frac{e^{-tx}}{1+t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(1+t)^2}\,dt = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} xF_3(x) = 1$ et $\boxed{F_3(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$.

* **4** On considère les fonctions définies par $f_4(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}$ et $F_4(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}$.

a) En remarquant que $0 \leqslant \frac{1}{1+t^x} \leqslant 1$ pour tous $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, montrer l'existence de $F_4(x)$ pour tout réel x.
Montrer que F_4 est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer l'existence de l'intégrale $A = \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|}{1+t^2}dt$.
Montrer que F_4 est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer $F_4'(x)$ comme une intégrale.
Indication : on pourra utiliser les inégalités $0 \leqslant \frac{t^x}{1+t^x} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{1+t^x} \leqslant 1$, et la convergence de A.

c) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, trouver une expression simple de $F_4'(x)$. En déduire la valeur des intégrales $F_4(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ et $F_4(\pi) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)}$.

Réponse :

a) $0 \leqslant \frac{1}{1+t^x} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f_4(x) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, ce qui garantit l'intégrabilité de la fonction f_4 sur $\mathbb{R}_+$.

Ceci constitue également une ***hypothèse de domination***, donc comme $x \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{F_4 \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

b) $h : t \mapsto \frac{|\ln t|}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t \in]0;1]$, $h(t) \leqslant \ln t$ donc h est intégrable sur $]0;1]$.
De plus $h(t) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, donc h est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Ainsi $\boxed{A = \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|}{1+t^2}dt \text{ converge}}$.

$x \mapsto f_4(x,t)$ admet une dérivée partielle continue par rapport à x :

$\frac{\partial f_4}{\partial x} = \frac{1}{1+t^2}\frac{\partial t^x}{\partial x}\frac{-1}{(1+t^x)^2} = -\frac{\ln(t)t^x}{(1+t^2)(1+t^x)^2} = \frac{-\ln t}{1+t^2}\frac{t^x}{1+t^x}\frac{1}{1+t^x}$.

On constate que $\left|\frac{\partial f_4}{\partial x}\right| \leqslant h(t)$, ce qui constitue une ***hypothèse de domination***.

Alors $\boxed{F_4 \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$, et $\boxed{F_4'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^2)(1+t^x)^2}dt.}$

Réponse : **c)** Dans l'intégrale définissant $F_4'(x)$, on effectue le changement de variable et $\mathscr{C}^1$ $u=\dfrac{1}{t}$, décroissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même : $\mathrm{d}t=\dfrac{-\mathrm{d}u}{u^2}$ et $\dfrac{\ln t\, t^x}{(1+t^2)(1+t^x)^2}=\dfrac{-\ln(u)\frac{1}{u^x}}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^x}\right)^2}=\dfrac{-\ln(u)u^x}{u^2(1+u^2)(1+u^x)^2}$, donc
$F_4'(x)=-\displaystyle\int_{+\infty}^0\frac{-\ln u\, u^x}{u^2(1+u^2)(1+u^x)^2}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\ln u\, u^x}{(1+u^2)(1+u^x)^2}\mathrm{d}u=-F_4'(x)$, et enfin $\boxed{F_4'(x)=0}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Mais $F_4(0)=\dfrac{\mathrm{d}t}{2(1+t^2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$, ce qui amène
$F_4(2)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\frac{\pi}{4}$ et $F_4(\pi)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\pi)}=\frac{\pi}{4}$.

☞ **5** Soit f_5 la fonction définie par $f_5(x,t)=\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$, et $F_5(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f_5(x,t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F_5 est définie et impaire sur $\mathbb{R}$. Montrer que F_5 est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\dfrac{\partial f_5}{\partial x}=\dfrac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}=\dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{tx^2}{1+t^2x^2}\right)$.

À l'aide de l'inégalité $0\leqslant\dfrac{u}{1+u^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, montrer que pour $t>0$, $0\leqslant\dfrac{\partial f_5}{\partial x}\leqslant\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{2(1+t^2)}$.

Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $F_5'(x)$ pour $x>0$ comme une intégrale, puis sans symbole intégrale.

c) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_5(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{8}$.

Réponse :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5(x,.)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant f_5(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $f_5(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}, f_5(-x,t) = -f_5(x,t)$ donc après intégration pour t décrivant $\mathbb{R}_+$, $F_5(-x) = -F_5(x)$.

b) La fonction $x \mapsto f_5(.,t)$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la majoration $|f_5(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ est une ***hypothèse de domination***, donc $\boxed{F_5 \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

c) f_5 est $\mathscr{C}^1$ $\dfrac{\partial f_5}{\partial x} = \dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{\partial \arctan(xt)}{\partial x} = \dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{x}{1+x^2t^2}$.
$\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{tx^2}{1+t^2x^2} = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\left(1+t^2x^2-x^2(1+t^2)\right) = \left(1-x^2\right)\dfrac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$
$1+u^2-2u \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{u}{1+u^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant \dfrac{xt}{1+x^2t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, soit $0 \leqslant \dfrac{\partial f_5}{\partial x} \leqslant \dfrac{1}{2(1+t^2)}$.
Ceci constitue une ***hypothèse de domination***, donc F_5 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F_5'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{tx^2}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t}$.
Soit $A > 0$, alors $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2-1}\left(\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^A \frac{tx^2}{1+t^2x^2}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2(x^2-1)}\left(\left[\ln(1+t^2)\right]_0^A - \left[\ln(1+x^2t^2)\right]_0^A\right) = \frac{1}{2(x^2-1)}\ln\frac{1+A^2}{1+x^2A^2}$.
En faisant tendre A vers $+\infty$, on trouve alors $F_5'(x) = \dfrac{\ln|x|}{1-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

d) F_5 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, s'annule en 0 et a la même dérivée que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u$ (sauf peut-être en $-1,0,1$), on trouve $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_5(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u}$.
Alors $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u = F_5(1) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Or $\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, donc $\dfrac{\arctan(t)}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan t^2\right)$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\arctan t)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{8}}$.

☞ $\boxed{6}$ Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{-1}{(2k+1)^2}$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2k+1)^2}$.

Réponse : Si $k=0$, ln est réputé intégrable sur $]0,1[$. Si $k\in\mathbb{N}^*$, alors $t\mapsto t^{2k}\ln t$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, donc est intégrable sur $]0,1]$.

Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t)=t^{2k} \\ v(t)=\ln t\end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=\dfrac{t^{2k+1}}{2k+1} \\ v'(t)=\dfrac{1}{t}\end{cases}$.

Alors $u\,v(t)=\dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ en posant $u\,v(0)=0$, donc le crochet $[u\,v]_0^1$ existe et vaut 0 :

$\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t=0-\int_0^1\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{(2k+1)^2}$.

Comme $f_k : t\mapsto t^{2k}\ln t$ est négative sur $]0,1]$, $\displaystyle\int_0^1|f_k(t)|\mathrm{d}t=-\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(2k+1)^2}$, donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\int_0^1|f_k(t)|\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(t)=\frac{\ln t}{1-t^2}$ pout tout $t\in]0,1[$:

Le théorème d'intégration terme à terme donne alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2k+1)^2}=\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$, donc finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{\ln|u|}{1-u^2}\mathrm{d}u=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2k+1)^2}}$

☞ **7** Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $\displaystyle G(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle H(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que H est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $H'(x)$ et $G'(x)$ pour $x>0$. (on exprimera $G'(x)$ sous forme d'une intégrale).

b) Montrer que $G+H^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, constante que l'on déterminera.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$, et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse :

a) Montrer que H est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer $H'(x)$ et $G'(x)$ pour $x > 0$. H est $\mathscr{C}^\infty$ comme primitive d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$: $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Alors $\boxed{H'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}}$.

$g(x,.) : t \mapsto g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc intégrable sur $[0,1]$.

$g(.,t) : x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$, et $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -2x(1+t^2)\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$.

Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant 2a$, la fonction constante de valeur $2a$ étant intégrable sur $[0,1]$, ce qui constitue une ***hypothèse de domination*** .
Finalement, G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\boxed{G'(x) = \displaystyle\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t}$.

b) $G + H^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$(G+H^2)'(x) = G'(x) + 2H(x)H'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)$.
Si $x \neq 0$, on peut avoir recours à un changement de variable strictement monotone $u = xt$: $x\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$, donc $(G+H^2)'(x) = 0$ si $x \neq 0$. On remarque de plus : $(G+H^2)'(0) = 0$.

Ainsi $G + H^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, de valeur $\boxed{G(0) + H(0)^2 = G(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}}$.

c) Comme $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+t^2}$ pour tout $x > 0$ et $t \in [0,1]$, on obtient par intégration : $0 \leqslant G(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$ par encadrement.

Alors $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(G(x)^2 + H(x)) = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right) + 0$, soit $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

* **8** Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on considère la fonction F_8 définie par $F_8(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F_8.
b) À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_8(x) = 0$.
c) Montrer que F_8 est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $F_8'(x)$ comme une intégrale.
d) En déduire une expression explicite de $F_8'(x)$, puis de $F_8(x)$.

Réponse :

a) Quitte à échanger a et b, supposons que $0 < a < b$ (si $b = a$, F_8 est nulle).
$\left|\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)\right| \leqslant \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$. $\psi : t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$, et $\psi(t) = \dfrac{1 - at - (1 - bt) + o_{t\to 0}(t)}{t} = (b - a) + o(t)$, donc ψ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
$\psi(t) \leqslant \dfrac{e^{-at}}{t} = o_{t\to+\infty}(e^{-at})$, donc ψ est intégrable sur $[1 + \infty[$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_8(x) \text{ est définie}}$ comme intégrale absolument convergente.

b) ψ est DSE, donc de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 ; elle est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\psi'(t) = -\dfrac{ae^{-at} - be^{-bt}}{t} - \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t^2}$.

Posons en vue d'une IPP $\begin{cases} u'(t) = \cos(xt) \\ v(t) = \psi(t) \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = \dfrac{\sin(xt)}{x} \\ v'(t) = \psi'(t) \end{cases}$;

$uv(t) = \psi(t)\dfrac{\sin(xt)}{x}$ s'annule en 0, et tend vers 0 en $+\infty$, donc $F_8(x) = 0 - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi'(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$.
L'intégrabilité de ψ' sur $\mathbb{R}_+$ montre que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi'(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} |\psi'|(t)\mathrm{d}t = M$, donc $|F_8(x)| \leqslant \dfrac{M}{x}$ et finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F_8(x) = 0.}$

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)\right) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}(-t\sin(xt)) = e^{-bt}\sin(xt) - e^{-at}\sin(xt)$.
Cette dérivée partielle est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, soit $[A, B] \subset \mathbb{R}_+^*$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\sin(xt)\right)\right| \leqslant e^{-bt} + e^{-at} \leqslant 2e^{-At}$ qui est intégrable, donc ceci constitue une ***hypothèse de domination*** .
F_8 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\boxed{F_8'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt)\mathrm{d}t}$.

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin(xt)\mathrm{d}t$ est la partie imaginaire de l'intégrale absolument convergente
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{ixt}\mathrm{d}t = \left[\dfrac{e^{(-a+ix)t}}{ix - a}\right]_0^{+\infty} = \left[\dfrac{(a + ix)e^{-at}e^{ixt}}{a^2 + x^2}\right]_0^{+\infty}$ donc $F_8'(x) = \dfrac{x}{b^2 + x^2} - \dfrac{x}{a^2 + x^2}$, et par intégration : $F_8(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(b^2 + x^2) - \ln(a^2 + x^2)\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Alors $C = \lim\limits_{n\to+\infty} F_8(x)$, donc $C = 0$; on en tire que $\boxed{F_8(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(b^2 + x^2) - \ln(a^2 + x^2)\right)}$.
En particulier $F_8(0) = \ln(b) - \ln(a)$.

* **9** **a)** Montrer la convergence, pour $x \in \mathbb{R}^*$, de $F_9(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 + t^2)(x^2 - t^2)}}$.

b) Si $x > 0$, effectuer le changement de variable $t = x.u$ dans $F_9(x)$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$F_9(x) = G(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + x^2u^2}\sqrt{1 - u^2}}$.
Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$, paire, monotone sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} G(n) = 0$.

c) Montrer que F_9 admet une limite en $+\infty$, et en 0, et préciser ces limites.

Réponse :

a) $f_9 : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est continue, positive et paire sur $]-x,x[$.

De plus, $f_9(t) = \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x+t)(x-t)}} \underset{t\to x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}}\dfrac{1}{x-t}$, d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^x f_9(t)\mathrm{d}t$.

Celle de $F_9(x)$ s'en déduit par parité (avec l'égalité $F_9(x) = 2\displaystyle\int_0^x f_9(t)\mathrm{d}t$).

b) Si $x > 0$, le changement de variable $t = u.x$ est strictement croissant et de classe $\mathscr{C}^1$ dans $[-x,x]$ dans $[-1,1]$, et $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$, donc $F_9(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{x^2-u^2x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} = G(x)$.

Cette formule peut être étendue par parité : $\forall x \in \mathbb{R}, F_9(x) = G(x)$.

$u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $xt \in]-1,1[$.

Pour tous $(x,u) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, dérivée de arcsin, est intégrable sur $]-1,1[$; $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$, ce qui fournit une ***hypothèse de domination*** .

G, et donc $\boxed{F_9\text{, est continue sur } \mathbb{R}}$.

Puisque $\sqrt{1+x^2u^2} = \sqrt{1+(-x)^2u^2}$, $G(x) = G(-x)$: G est paire.

De plus, si $0 < y < x$, pour tout $u \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2u^2}}$ donc par multiplication par $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, puis intégration : $G(x) \leqslant G(y)$: $\boxed{G \text{ est décroissante}}$.

Un changement de variable $t = \sin u$, croissant et $\mathscr{C}^1$ de $]-1,1[$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donne $G(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}}$;

La parité de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}}$ donne ensuite $G(x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}}$.

D'après la relation de Chasles, pour $x \in]0,1[$:

$\dfrac{G(x)}{2} = \displaystyle\int_0^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}} + \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}}$; mais $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}} \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$, et comme $\sqrt{1+x^2\sin^t} \geqslant \sqrt{1+x}$ pour $t \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2\sin^2 t}} \leqslant \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x}} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}$.

Alors $0 \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+x}}$, donc le théorème d'encadrement $\boxed{\text{donne } \lim\limits_{x\to 0} G(x) = 0}$.

c) F_9 étant monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_9(n) = 0$ implique $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F_9(x) = 0.}$

Puisque G est continue en 0, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} F_9(x) = \lim\limits_{x\to 0} G(x) = G(0) = \pi.}$