PT Exercices sur les intégrales généralisées 2024/2025

feuille N° 8

☞ **1** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^6}{1+t^8}\,\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|t-t^5|}}\,\mathrm{d}t$ **d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+1-\sqrt{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t$ **e)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln t|}}$ **g)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[n]{1+t^{n+1}}}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t+\frac{1}{\tan t}}\,\mathrm{d}t$ **i)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$

☞ **2** Démontrer l'existence et calculer la valeur des intégrales : $(a,b)\in\mathbb{R}_+^{*\,2}, a<b$;

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ *(exponentielle complexe)* **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ *(éléments simples)*

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *(IPP)* **d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ $(u=\sqrt{t})$ **e)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$ $(u=\sin t)$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ $(x=\sqrt{1-t})$ **g)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ *(IPP)* **h)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(2+t\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$ *(IPP)*

☞ **3** **a)** Montrer la convergence des intégrales $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t$ et $B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $A=B$ et que $A=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $A+B=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de A et B.

* **4** **a)** Déterminer la nature, et calculer les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2\ln t}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$ (*Poser* $u=\dfrac{1}{t}$).

b) Si $a\in\mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature, et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{(t+a)^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

* **5** **Intégrale de Gauss**

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

b) À l'aide d'un changement de variable $t=u^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $y>0$ $\displaystyle\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}-\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

d) En remarquant que pour $t\geqslant y>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{t}}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{y\sqrt{y}}$:

justifier que $\displaystyle\int_y^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-y}}{y\sqrt{y}}$ et en déduire que $\displaystyle\int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\underset{y\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}$.

e) En conclure que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

☞ **6** **Fonction Γ de RIEMANN**

a) Justifier l'existence de l'intégrale $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

b) À l'aide d'une intégration par parties prudente, montrer que pour $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

c) Déterminer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

d) À l'aide d'un changement de variable $t=u^2$, déterminer une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $G=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

e) Montrer que pour $m\in\mathbb{N}$, $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=2\dfrac{(2m)!}{4^m\,m!}G$.

☞ **7** **Intégrales de WALLIS**

a) Soit $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$; Vérifier que $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$; Montrer que (I_n) est suite décroissante et positive.

b) Montrer que $\forall n\geqslant 1 \quad I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$, et en déduire que $I_{n+1}\sim I_n$.

c) Vérifier $\prod_{k=1}^{n}2k=2^n.n!$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$; en déduire $I_{2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}I_0$ et $I_{2n+1}=\dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}I_1$;

d) Montrer que $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et la formule de Wallis $\dfrac{\pi}{2}=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2(2p+1)}$

e) Montrer l'existence de $J_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et en calculer la valeur (*on pourra effectuer un changement de variable* $t=\tan x$).

* **8** **Polynômes de TCHEBYCHEV**

a) Montrer que si $P\in\mathbb{R}[X]$, alors l'intégrale $\int_{-1}^{1}\dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ converge.

b) En déduire que $(P,Q)\mapsto\langle P|Q\rangle=\int_{-1}^{1}\dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Justifier que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $\cos((n+1)t)+\cos((n-1)t)=2\cos(nt)\cos t$ et en déduire par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$: $\exists T_n\in\mathbb{R}_n[X],\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad\cos(nt)=T_n(\cos t)$,
avec la relation de récurrence $T_{n+1}=2X\,T_n-T_{n-1}$.
Montrer que $\deg T_n=n$.

d) Montrer que si $m\neq n$, $\langle T_m|T_n\rangle=0$ et calculer $\langle T_n|T_n\rangle$.
En déduire une base de $\mathbb{R}[X]$ orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

e) Déterminer la valeur minimale de $\int_{-1}^{1}\dfrac{(t^3-at-b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}$.

* **9** **Intégration terme à terme**

a) Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q}=\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de $I_{p,q}$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{p,q}=\dfrac{-q}{p+1}I_{p,q-1}$ pour $p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $I_{n,n}=\dfrac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}$.

c) Montrer que, pour tout $t\in]0,1]$, $t^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(t\ln t)^n}{n!}$ et en déduire que $\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{p-1}}{p^p}$.

exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nature		X	X	X		X	X		X
équivalent d'une intégrale					X		X		
égalité série-intégrale									X
espace préhilbertien								X	