PT Exercices sur les intégrales généralisées (solutions) 2024/2025

☞ **1** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^6}{1+t^8}\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|t-t^5|}}\mathrm{d}t$ **d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+1-\sqrt{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t$ **e)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln t|}}$ **g)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[n]{1+t^{n+1}}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t + \frac{1}{\tan t}}\mathrm{d}t$ **i)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$

Réponse : **a)** $t \mapsto \dfrac{1+t^6}{1+t^8}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{1+t^6}{1+t^8} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^6}{1+t^8}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

b) $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = 0$ donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

c) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|t-t^5|}}$ est continue et positive sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

$\dfrac{1}{\sqrt{|t-t^5|}} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-t^5|}}$ converge ; $\dfrac{1}{\sqrt{|t-t^5|}} = \dfrac{1}{\sqrt{t|1-t|(1+t)(1+t^2)}} \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}$, donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-t^5|}}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-t^5|}}$ convergent. $\dfrac{1}{\sqrt{|t-t^5|}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{5/2}}$, donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-t^5|}}$ converge.

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|t-t^5|}}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

d) $t \mapsto t+1-\sqrt{t^2+2t+2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; de plus pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$t+1-\sqrt{t^2+2t+2} = \frac{(t+1)^2-(t^2+2t+2)}{t+1+\sqrt{t^2+2t+2}} = \frac{-1}{t+1+\sqrt{t^2+2t+2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2t}$$

donc $t+1-\sqrt{t^2+2t+2} \leqslant 0$ pour t assez grand ; comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+1-\sqrt{t^2+2t+2}\right)\mathrm{d}t \text{ diverge}}$.

e) $f : t \mapsto \dfrac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est positive et continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to0_+} \frac{1}{\ln t} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0_+} f(t) = 0$. Donc f est continue par morceaux sur $[0;1/2[$.

$\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{t-1}{\ln t} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to1} f(t) = 2\mathrm{e}^{-1}$. Donc f est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

Enfin, $\dfrac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}(\mathrm{e}^{-t})$; $t^2\dfrac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}(t^2\mathrm{e}^{-t}) = \mathscr{O}(1)$, c'est-à-dire que $\dfrac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{\ln t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

Réponse : f) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|\ln t|}}$ est positive et continue sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$. $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{1}{\sqrt{|\ln t|}} = 0$, donc f est continue par morceaux sur $[0,/12[$.

Quand $t \to 1$, $\ln t \sim t-1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{|\ln t|}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{|t-1|}}$; or $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-1|}}$ et $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-1|}}$ convergent, donc f est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Pour t assez grand, $\ln t \leqslant t$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{|\ln t|}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge, donc $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|\ln t|}} \text{ diverge.}}$

g) $\mapsto \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt[n]{1+t^{n+1}}} = \left(1+t^{n+1}\right)^{-1/n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\left(1+t^{n+1}\right)^{-1/n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{-1-\frac{1}{n}}$, et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\frac{1}{n}}}$ converge, donc $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[n]{1+t^{n+1}}} \text{ converge}}$.

h) i) On pose $\operatorname{cotan} t = \dfrac{1}{\tan t}$: $g : t \mapsto \sqrt{\tan t + \operatorname{cotan} t}$ est continue et positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus $g\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \sqrt{\operatorname{cotan} t + \tan t} = g(t)$, donc les intégrales de g sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sont de même nature (et de même valeur éventuelle).

Enfin, $\tan(t) = o(\operatorname{cotan} t)$ et $\operatorname{cotan} t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, donc $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; or $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge, donc

$\boxed{g \text{ est intégrable sur } \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[}$.

j) $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$; de plus $\dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, donc $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$ converge.

$t^2 \dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{-3/2}\mathrm{e}^{-t} \to 0$, donc $\dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Ceci achève la preuve de l' $\boxed{\text{intégrabilité de } t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

☞ **2** Démontrer l'existence et calculer la valeur des intégrales : $(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, a < b$;

a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ *(exponentielle complexe)* **b)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$ *(éléments simples)*

c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ *(IPP)* **d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ $(u = \sqrt{t})$ **e)** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$ $(u = \sin t)$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ $(x = \sqrt{1-t})$ **g)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ *(IPP)* **h)** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left(2 + t\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$ *(IPP)*

Réponse : **a) Convergence :** $\left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,dt\right| \leqslant e^{-t}$ donc $t \mapsto e^{-t}\sin t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Valeur : comme $\left|\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}\,dt\right| \leqslant e^{-t}$, $t \mapsto e^{-t}e^{it}$ est également intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\; dt = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}\,dt\right)$. Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-1+i} = \frac{1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2}$

Par passage à la partie imaginaire, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,dt = \frac{1}{2}}$.

b) Convergence : $t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\frac{1}{(t+1)(t+2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ converge.

Valeur : il existe des réels a et b tels que $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$. On trouve $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$. Alors, pour tout $A > 0$,

$\int_0^A \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int_0^A \frac{dt}{t+1} - \int_0^A \frac{dt}{t+2} = [\ln(t+1)]_0^A - [\ln(t+2)]_0^A = 0 - (-\ln(2)) + \ln\frac{A+1}{A+2}$.

En faisant tendre A vers $+\infty$, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \ln 2}$.

c) Convergence : puisque, en vertu des croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^3e^{-t} = 0$, $te^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale converge.

Valeur : Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$ $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$. Alors $uv = -te^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$ et vaut 0 en 0, donc $\boxed{\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 0 - \int_0^{+\infty} -e^{-t}dt = 1}$.

d) Convergence : Pour $t \geqslant 1$, $t \geqslant \sqrt{t}$ donc $0 \leqslant e^{-\sqrt{t}} \leqslant e^{-t}$. Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable, $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

Valeur : On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. $t = u^2$ donc $dt = 2u\,du$, et alors $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u}du$ qui converge forcément.

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on trouve $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = 1$.

e) Convergence : $f : t \mapsto \cos t\,\ln(\tan t)$ est continue sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et de signe constant sur chacun des intervalles $I_1 = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan t \underset{t\to0}{\sim} t$, donc $\ln(\tan t) - \ln t = \ln\frac{\tan t}{t} = o(\ln t)$: $\ln\tan t \underset{t\to0}{\sim} \ln t$, et donc $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$.

f est donc intégrable sur I_1.

Posons $h = \frac{\pi}{2} - t$, alors $\tan t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{1}{\tan h}$ donc $\ln(\tan t) = -\ln(\tan h)$, et $\cos t = \sin h$. Lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $h \to 0$ donc $f(t) = -\sin h \ln\tan h \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -h\ln h \to 0$. f est prolongeable par continuité en 0, avec la valeur $\frac{\pi}{2}$: f est intégrable sur $I = I_1 \cup I_2$.

Valeur : Le changement de variable $u = \sin t$, $\mathscr{C}^1$ et croissant de I dans $]0, 1[$ donne $du = \cos t\,dt$ et $\tan t = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{u}{\sqrt{(1-u)(1+u)}}$, donc $\ln\tan t = \ln u - \frac{1}{2}\ln(1-u) - \frac{1}{2}\ln(1+u)$.

Alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\ln(\tan t)\,dt = \int_0^1 \ln u - \frac{1}{2}\ln(1-u) - \frac{1}{2}\ln(1+u)du$.

On rappelle, que, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ (même nuls), $\int_a^b \ln u\,du = [u\ln u - u]_a^b$, et donc

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\ln(\tan t)\,dt = \int_0^1 \ln u\,du - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u)du - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+u)du = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ln 2 = \boxed{-\ln 2}$

f) Convergence : $g : t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est négative et continue sur $]0, 1[$. $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to0_+}{\sim} \ln t$. g est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Posons $h = 1 - t$, alors $g(t) = \frac{\ln(1-h)}{\sqrt{h}} \underset{h\to0}{\sim} \frac{-h}{\sqrt{h}} = -\sqrt{h}$.

Réponse : g est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$, puis sur $]0,1[$.

Valeur : Le changement de variable $x=\sqrt{1-t}$, $\mathscr{C}^1$ et décroissant de $]0,1[$ dans lui-même, donne $t=1-x^2$ soit $\mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x$, et $g(t)=\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$, donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\int_1^0\frac{\ln(1-x^2)}{x}(-2x\mathrm{d}x)=2\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x$.

D'après l'exercice précédent : $\displaystyle\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x+\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=-1+(-1+2\ln 2)$ donc finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=4\ln 2-4}$.

g) Convergence : $t\mapsto\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)=\ln\left(\dfrac{t^2+1}{t^2}\right)=\ln(t^2+1)-2\ln t\underset{t\to 0}{\sim}-2\ln t$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$.
Les deux comparaisons montrent que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\end{cases}$ $\begin{cases}u(t)=t\\ v'(t)=\dfrac{-2}{t+t^3}\end{cases}$.

D'après les équivalents obtenus plus haut, $u.v(t)=t\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en 0.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t=[uv(t)]-\int_0^{+\infty}\frac{-2t}{t+t^3}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\frac{\pi}{2}$ et finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\pi.}$

h) Convergence : $\varphi: t\mapsto\left(2+t\ln\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. $\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{t+1-2}{t+1}\underset{t\to+\infty}{\sim}1-\dfrac{2}{t}$ donc $t\ln\dfrac{t-1}{t+1}\sim-\dfrac{2}{t}.t$ Ceci ne fournit pas d'équivalent valide de φ en $+\infty$.

Cependant, $\dfrac{t-1}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}=1-\dfrac{2}{t}\dfrac{1}{1+\frac{1}{t}}=1-\dfrac{2}{t}\left(1-\dfrac{1}{t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)=1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{t^2}+o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, puis en posant $x=\dfrac{1}{t}$:
$\varphi(t)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$, et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-2}{1-x^2}=-2-2x^2+o(x^2)$. Par intégration, $\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-2x-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$ donc $\ln\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{-2}{t}-\dfrac{2}{3t^3}+o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, puis $2+t\ln\dfrac{t-1}{t+1}=2+t\left(\dfrac{-2}{t}-\dfrac{2}{3t^3}\right)+o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{-2}{3t^2}$, ce qui garantit que φ est négative au voisinage de $+\infty$, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Valeur : Soit $b>a>1$, effectuons sur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t\ln\frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ une intégration par parties, en posant $\begin{cases}u'(t)=t\\ v(t)=\ln\dfrac{t-1}{t+1}\end{cases}$ $\begin{cases}u(t)=\dfrac{t^2}{2}\\ v'(t)=\dfrac{2}{t^2-1}\end{cases}$.

$\displaystyle\int_a^b t\ln\frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_a^b-\int_a^b\frac{t^2}{2}\frac{2}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{b^2}{2}\ln\frac{b-1}{b+1}-\frac{a^2}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\mathrm{d}t.$
Ceci nous amène à
$\displaystyle\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{b^2}{2}\ln\frac{b-1}{b+1}-\frac{a^2}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}+b-a-\left[t+\frac{1}{t^2-1}\right]_a^b=\frac{b^2}{2}\ln\frac{b-1}{b+1}-\ln\frac{b-1}{b+1}-\frac{a^2}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}+\ln\frac{a-1}{a+1}=-a+b+b\frac{b^2}{2}\ln\frac{b-1}{b+1}-\ln\frac{b-1}{b+1}+\frac{a^2-1}{2}\ln\frac{a-1}{a+1}$

D'après la question précédente : $b+b\dfrac{b^2}{2}\ln\dfrac{b-1}{b+1}=b+\dfrac{b^2}{2}\ln\dfrac{b-1}{b+1}=b-b-\dfrac{1}{3b}+o\left(\dfrac{1}{b}\right)$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$, ainsi que $\ln\dfrac{b-1}{b+1}$; de plus $\dfrac{a^2-1}{2}\ln\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{a+1}{2}(a-1)\ln(a-1)-\dfrac{a^2-1}{2}\ln(a+1)$ tend vers 0 quand a tend vers 1.

En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=-1}$.

☞ $\boxed{3}$ **a)** Montrer la convergence des intégrales $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$ et $B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $A = B$ et que $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $A + B = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de A et B.

Réponse :

a) $t \mapsto \ln\sin t$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $t \mapsto \ln\cos t$ est continue et négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\ln\sin t - \ln t = \ln\frac{\sin t}{t} \to 0$, donc $\ln\sin t \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$. Comme ln est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\boxed{t \mapsto \ln\sin t \text{ est intégrable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}$. Posons $t = \frac{\pi}{2} - h$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin h$ donc

$\ln\cos t \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \ln\sin h \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \ln h$. $\boxed{t \mapsto \ln\cos t \text{ est intégrable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

b) Dans l'intégrale A, effectuons le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, strictement décroissant et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos u\,\mathrm{d}u = B$: $\boxed{A = B}$.

Dans l'intégrale A, effectuons le changement de variable $u = \pi - t$, strictement décroissant et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$: $\sin(\pi - t) = \sin t$, donc $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(\pi - u)(-\mathrm{d}u)$ donc

$\boxed{A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin(u)\mathrm{d}u}$.

c) D'après la relation de Chasles : $A + B = \int_0^{\pi} \ln\sin(u)\mathrm{d}u$; or, en effectuant dans $A + B$ le changement de variable croissant et $\mathscr{C}^1$ $u = 2t$:

$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(2t)(2\mathrm{d}t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\sin t\cos t)\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}t + A + B\right) = \pi\ln 2 + 2(A + B)$;

on trouve $A + B = -\pi\ln 2$; or $B = A$ donc $A + B = 2A$. Finalement $\boxed{A = B = \frac{-\pi}{2}\ln 2}$.

* **4** **a)** Déterminer la nature, et calculer les valeurs de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^2\ln t}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$ (*Poser* $u = \frac{1}{t}$).

b) Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature, et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+a)^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Réponse :

a) $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(t+1)^2}$ et $g : t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et de signe constant sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

En 0, $\dfrac{\ln t}{(t+1)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ et $\dfrac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2} \to 0$ donc f et g sont intégrables sur $]0,1]$.

$\dfrac{t^3}{2} \cdot \dfrac{\ln t}{(t+1)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ donc $\dfrac{t^3}{2} \cdot \dfrac{\ln t}{(t+1)^2} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}(1)$; $\dfrac{\ln t}{(t+1)^2} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}\left(t^{-3/2}\right)$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

$\dfrac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^4} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}\left(t^{-3}\right)$, donc g est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Finalement $\boxed{\text{les deux intégrales convergent}}$.

$t \mapsto u = \dfrac{1}{t}$ est décroissante et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{\left(\frac{u+1}{u}\right)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$$ donc cette intégrale est nulle.

Par le même changement de variable :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \ln t}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{u^2\left(\frac{u^3+1}{u^3}\right)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{u^2 \ln u}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u$$ donc cette intégrale est nulle.

Finalement $\boxed{\text{les deux intégrales sont nulles}}$.

b) $h_a : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(t+a)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et de signe constant sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

$\dfrac{\ln t}{(t+a)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{a^2}$ et $\dfrac{\ln t}{(t+a)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^2} = \mathscr{O}_{t\to+\infty}\left(t^{-3/2}\right)$ donc h_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{(t+a)^2} \\ v(t) = \ln t \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = \dfrac{-1}{t+a} \\ v(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

Alors, si $\varepsilon > 0$, $[uv]_\varepsilon^{+\infty}$ converge et vaut $\dfrac{\ln(\varepsilon)}{a+\varepsilon}$; donc $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-\ln(\varepsilon)}{a+\varepsilon} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t(t+a)}\,\mathrm{d}t$ (1).

On remarque que $\dfrac{1}{t(t+a)} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+a}\right)$, donc si $X > 0$, alors

$$\int_\varepsilon^X \frac{1}{t(t+a)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\int_\varepsilon^X \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^X \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{a}\left(\ln(X) - \ln(\varepsilon) - \ln(a+X) + \ln(a+\varepsilon)\right)$$

$$\int_\varepsilon^X \frac{1}{t(t+a)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\ln\frac{X}{a+X} - \ln(\varepsilon) - \ln(a+\varepsilon)\right).$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on trouve $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{1}{t(t+a)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(-\ln(\varepsilon) - \ln(a+\varepsilon)\right)$, donc (1) devient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(\varepsilon)}{a+\varepsilon} - \frac{\ln(\varepsilon)}{a} + \frac{\ln(a+\varepsilon)}{a} = \ln(\varepsilon)\frac{-\varepsilon}{\varepsilon(a+\varepsilon)} + \frac{\ln(a+\varepsilon)}{a}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve alors $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+a)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln a}{a}}$.

* $\boxed{5}$ **Intégrale de Gauss**

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

b) À l'aide d'un changement de variable $t = u^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $y > 0$ $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}} - \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

d) En remarquant que pour $t \geqslant y > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{y\sqrt{y}}$:

justifier que $\displaystyle\int_y^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y\sqrt{y}}$ et en déduire que $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}$.

e) En conclure que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Réponse :

a) $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est continue et positive $\mathbb{R}_+^*$; de plus, pour $u \geqslant 1$, $u \leqslant u^2$ donc $\mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \mathrm{e}^{-u}$. Comme $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ existe.

b) Le changement de variable $t = u^2$ est strictement croissant et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même ; de plus $u = \sqrt{t}$, ce qui donne $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$.

c) Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{2t\sqrt{t}} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{t}} \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$.

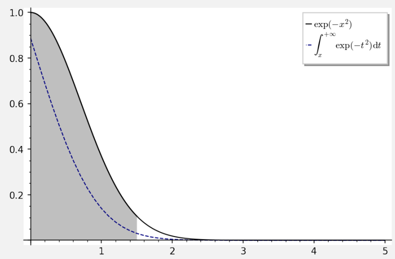
Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv(t) = 0$ donc $\boxed{\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = [uv]_y^{+\infty} - \int_y^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}} - \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$

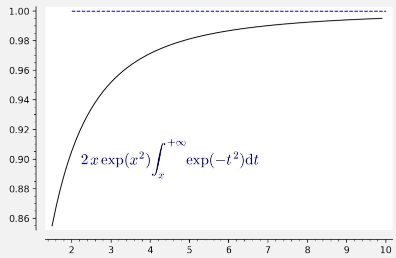
d) $\displaystyle\int_y^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_y^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{y\sqrt{y}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{y\sqrt{y}}\int_y^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y\sqrt{y}}$.

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{y\sqrt{y}} = o_{y\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}\right)$, donc l'intégration par parties effectuée ci-dessus amène :

$\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}} = o_{y\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}\right)$. Finalement $\boxed{\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}}$

e) D'après le changement de variable $t = u^2$, $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}}$.





☞ **6** **Fonction Γ de Riemann**

a) Justifier l'existence de l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b) À l'aide d'une intégration par parties prudente, montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) Déterminer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) À l'aide d'un changement de variable $t = u^2$, déterminer une relation entre $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

e) Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = 2\dfrac{(2m)!}{4^m\, m!}G$.

Réponse : a) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = f(x,t)$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$ (si $0 < x < 1$) et $[0,+\infty[$ (si $x \geqslant 1$).
De plus, en $+\infty$: $\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = t^{x-1}e^{-t/2}$ tend vers 0 en $+\infty$ (croissances comparées) donc $t^{x-1}e^{-t} = \mathcal{O}\left(e^{-t/2}\right)$, or $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. $t \mapsto f(x,t)$ est intégable sur $[1,+\infty[$.
Si $0 < x < 1$, il faut également étudier l'intégrabilité en 0 : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ qui est intégrable sur $]0,1]$ si $x > 0$ (cas de Riemann).

b) Posons en vue d'une intégration par parties, si $x > 0$: $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t^x \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = xt^{x-1} \end{cases}$.
Alors $uv : t \mapsto -t^x e^{-t}$ admet une limite nulle en 0 et en $+\infty$, donc
$\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} u'v = [uv]_{\mathbb{R}_+^*} - \int_{\mathbb{R}_+^*} uv' = 0 - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)$

c) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right] = 1$. Comme $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\Gamma(n) = n!$: la propriété est vraie pour $n = 1$, et si on la suppose vraie au rang n, alors $\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n) = (n+1).n! = (n+1)!$.

d) $t = u^2$ définit un changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même ; $dt = 2udu$.
Alors $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} u^{-1}2ue^{-u^2}du = 2G$.

e) Comme $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$, $\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right) = \left(m-\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2m-1}{2}\Gamma\left(m-\dfrac{1}{2}\right)$
donc $\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^m}\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^m}\dfrac{(2m)!}{2^m.m!}2G$.

☞ **7** **Intégrales de Wallis**

a) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$; Vérifier que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$; Montrer que (I_n) est suite décroissante et positive.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 1 \quad I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$, et en déduire que $I_{n+1} \sim I_n$.

c) Vérifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n.n!$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$; en déduire $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}I_0$ et $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}I_1$;

d) Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et la formule de Wallis $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2(2p+1)}$

e) Montrer l'existence de $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en calculer la valeur (*on pourra effectuer un changement de variable* $t = \tan x$).

Réponse :

a) Après changement de variables $x = \dfrac{\pi}{-t}$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

Pour tout $x \in K = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ et après intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $\boxed{(I_n) \text{ est une suite décroissante et positive.}}$

Réponse :

b) Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = \sin x \\ v(t) = \sin^n(x) \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = -\cos x \\ v(t) = n\sin^{n-1}(x)\cos x \end{cases}$, alors

$I_{n+1} = \left[-\cos x \sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = n(I_{n-1}-I_{n+1})$,

donc $\boxed{(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.}$ Alors, comme $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$, $0 \leqslant \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1$ donc par encadrement $\dfrac{I_n}{I_{n-1}} \to 1$, et finalement $\boxed{I_{n+1} \sim I_n.}$

c) $\prod_{k=1}^{n} 2k = \prod_{k=1}^{n} 2 \prod_{k=1}^{n} k = 2^n.n!$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k-1).\prod_{k=1}^{n}(2k) = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)2k = \prod_{j=1}^{2n} j = (2n)!$, donc $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Comme $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n-2}} = \dfrac{2n-1}{2n}$, $\dfrac{I_{2n}}{I_0} = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k} = \dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}$; $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1}$ donc : $\dfrac{I_{2n+1}}{I_1} = \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$ (par télescopage).

d) Par produit $I_{2n}I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2^n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2n+1}$, mais $I_{2n+1} \sim I_{2n}$ donc $I_{2n}I_{2n+1} \sim I_{2n}^2$, donc $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Par changement de variable, $\boxed{I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$. De même $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{(2^n n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\dfrac{2}{\pi} = \left(\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$. Puisque $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \sim 1$, on trouve bien $\boxed{\dfrac{\pi}{2} = \lim_{p\to+\infty} \dfrac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2(2p+1)}}$.

e) $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \sim \dfrac{1}{t^{2n}}$, d'où la convergence de J_n si $n \geqslant 1$. Avec $t = \tan\theta$, $\mathrm{d}t = (1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}$ et $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$; alors $J_n = \int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = I_{2n-2}$.

* **8** **Polynômes de Tchebychev**

a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors l'intégrale $\int_{-1}^{1} \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ converge.

b) En déduire que $(P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1}\dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) = 2\cos(nt)\cos t$ et en déduire par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$: $\exists T_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(nt) = T_n(\cos t)$,
avec la relation de récurrence $T_{n+1} = 2X\,T_n - T_{n-1}$.
Montrer que $\deg T_n = n$.

d) Montrer que si $m \neq n$, $\langle T_m|T_n\rangle = 0$ et calculer $\langle T_n|T_n\rangle$.
En déduire une base de $\mathbb{R}[X]$ orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

e) Déterminer la valeur minimale de $\int_{-1}^{1}\dfrac{(t^3-at-b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}$.

Réponse :

a) $x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, et $P(x) = \mathcal{O}_1(1)$ donc $\dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{P(x)}{\sqrt{1+x}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \mathcal{O}_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$.

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0,1[$, $x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$.
On conclut sur l'intervalle $]-1,0]$ par parité.

b) $\langle P|Q\rangle$ est définie pour tous $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ d'après la question précédente.
$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique et bilinéaire (facile) ; le caractère défini et positif résulte du cours.

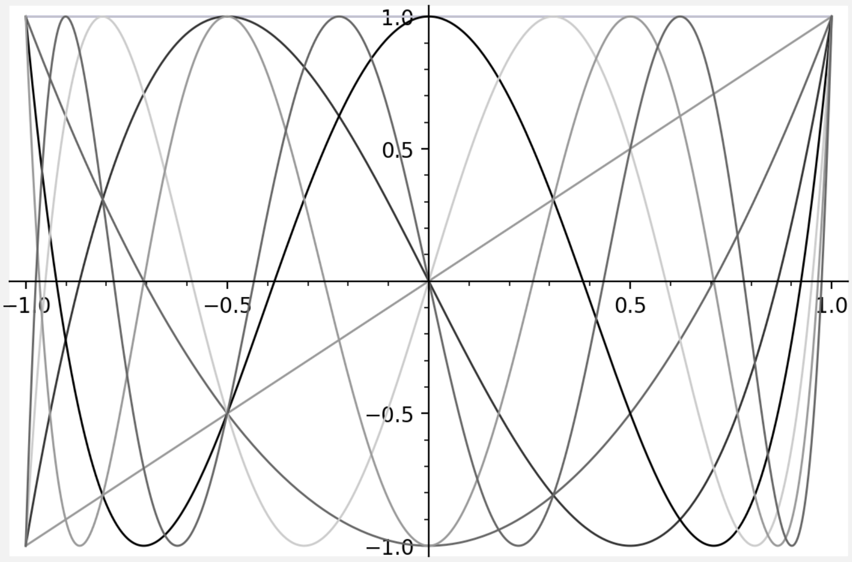
Réponse :

c) Pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(nt+t)=\cos(nt)\cos t-\sin(nt)\sin t$ et
$\cos(nt-t)=\cos(nt)\cos t+\sin(nt)\sin t$, donc $\cos((n+1)t)+\cos((n-1)t)=2\cos(nt)\cos t$.
Supposons que, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, il existe T_{n-1} et T_n dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $T_{n-1}(\cos t)=\cos((n-1)t)$, $T_n(\cos t)=\cos(nt)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, et que $\deg(T_{n-1})=n-1$, $\deg(T_n)=n$.
Alors $\cos((n+1)t)=2\cos(nt)\cos t-\cos((n-1)t)=2T_n(\cos t)\cos t-T_{n-1}(\cos t)$, donc en posant $T_{n+1}(X)=2X\,T_n-T_{n-1}$, $\boxed{T_{n+1}(\cos t)=\cos((n+1)t)\text{ pour tout } t\in\mathbb{R}.}$
De plus, $\deg T_{n+1}=1+\deg T_n=n+1$.

d) Si $m\neq n$, $\langle T_m|T_n\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; effectuons dans cette intégrale le changement bijectif et $\mathscr{C}^1$ de $]-1,1[$ dans $]\pi,0[$.
$\langle T_m|T_n\rangle=\displaystyle\int_{\pi}^{0}\frac{\cos(mu)\cos(nu)}{\sin u}(-\sin u\mathrm{d}u)=\int_0^{\pi}\cos(mu)\cos(nu)\mathrm{d}u.$
Or, si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$, donc $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$. En posant $a=\dfrac{(m+n)u}{2}$ et $b=\dfrac{(m-n)u}{2}$, on trouve $\cos(mu)\cos nu)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{(m+n)u}{2}+\cos\dfrac{(m-n)u}{2}\right)$.
Or, si $p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos pu)\mathrm{d}u=\left[\frac{\sin(pu)}{p}\right]_0^{\pi}=0$, et si $p=0$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos pu)\mathrm{d}u=\pi$.

Par intégration entre 0 et π, et avec $(m,n)\in\mathbb{N}^2$: $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(mu)\cos(nu)\mathrm{d}u=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } m=n\neq 0\\ \pi & \text{si } m=n=0\end{cases}$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de degrés échelonnés, donc une base de $\mathbb{R}[X]$.



9 Pour minimiser $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(t^3-at-b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\|X^3-aX-b\|_2^2$, on projette X^3 orthogonalement sur $\mathrm{Vect}(1,X)$, obtenant ainsi $P_3=\dfrac{\langle X^3|X\rangle}{\langle X|X\rangle}X+\dfrac{\langle X^3|1\rangle}{\langle 1|1\rangle}1$, or $\langle X^3|1\rangle=0$, et $\langle X^3|X\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\pi$; $\langle X|X\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$ (*cf.* les intégrales de Wallis).
Donc $P_2=\dfrac{3}{4}X$, et $\mathrm{d}(X^3,\mathbb{R}_1[X])=\|X^3-P_2\|_2$; par utilisation du théorème de Pythagore,
$\|X^3-P_2\|^2=\|X^3\|^2-\|P_2\|^2=\left(\dfrac{5\pi}{16}\right)-\dfrac{9}{\pi}32=\dfrac{\pi}{32}$ donc $\boxed{\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\frac{(t^3-at-b)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{32}}$.

* 10 Intégration terme à terme

a) Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q}=\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de $I_{p,q}$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{p,q}=\dfrac{-q}{p+1}I_{p,q-1}$ pour $p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $I_{n,n}=\dfrac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}$.

c) Montrer que, pour tout $t\in]0,1]$, $t^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(t\ln t)^n}{n!}$ et en déduire que $\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{p-1}}{p^p}$.

Réponse :

a) Si $p\in\mathbb{N}^*$, alors $\lim_{t\to0_+}t^p(\ln t)^q=0$ (croissances comparées) donc $t\mapsto t^p(\ln t)^q$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, et $I_{p,q}$ est ordinaire.

Si $p=0$, alors $\sqrt{t}(\ln t)^q\to0$ (croissances comparées) donc $(\ln t)^q=\mathcal{O}\left(t^{-1/2}\right)$ et $\boxed{I_{0,q}\text{ converge}}$ par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

Posons alors en vue d'une IPP : $\begin{cases}u'(t)=t^p\\ v(t)=(\ln t)^q\end{cases}$; $\begin{cases}u(t)=\dfrac{t^{p+1}}{p+1}\\ v'(t)=\dfrac{q}{t}(\ln t)^{q-1}\end{cases}$.

$u\,v(t)=\dfrac{t^{p+1}(\ln t)^q}{p+1}$ vaut 0 en 1, et tend vers 0 en 0, donc le crochet $[u\,v]_0^1$ converge et vaut 0 ;

$I_{p,q}=0-\int_0^1\dfrac{t^{p+1}}{p+1}\dfrac{q}{t}(\ln t)^{q-1}\mathrm{d}t=-\dfrac{q}{p+1}I_{p,q-1}$.

b) Comme $I_{p,q}\neq0$, on en déduit par division : $\dfrac{I_{p,q}}{I_{p,q-1}}=-\dfrac{q}{p+1}$ puis $\prod_{q=1}^{p}\dfrac{I_{p,q}}{I_{p,q-1}}=\prod_{q=1}^{p}-\dfrac{q}{p+1}$; par télescopage, $\dfrac{I_{p,p}}{I_{p,0}}=\dfrac{(-1)^p}{(p+1)^p}\prod_{q=1}^{p}q=\dfrac{(-1)^p\,p!}{(p+1)^p}$.

Mais $I_{p,0}=\int_0^1 t^p\mathrm{d}t=\left[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{p+1}$, donc (en prenant $p=n$) : $\boxed{I_{n,n}=\dfrac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}.}$

c) On rappelle le développement en série entière : $\mathrm{e}^u=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u^n}{n!}$, de rayon de convergence infini.

En prenant $u=t\ln t$, on obtient : $t^t=\mathrm{e}^{t\ln t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n(\ln t)^n}{n!}$.

Posons alors $f_n(t)=\dfrac{t^n(\ln t)^n}{n!}$, et $I=]0,1[$; $u_n=\int_I|f_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1\dfrac{t^n(-\ln t)^n}{n!}\mathrm{d}t=(-1)^nI_{n,n}=\dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)!}{(n+2)^{n+2}}.\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}=\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que $\sum u_n$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne alors la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^t\mathrm{d}t$ (qui ne pose pas de problème dans la mesure où $t\mapsto t^t$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, et l'égalité :

$\int_0^1 t^t\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\dfrac{t^n(\ln t)^n}{n!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$; en posant $p=n+1$: $\boxed{\int_0^1 t^t\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{p-1}}{p^p}.}$