☞ **1** Calculer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{n \ln n}{2^n} x^{2n}$ b) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ c) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right) x^n$

d) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) x^n$ e) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n} x^n$ f) $\sum_{n \geq 1} n^{-n} x^{n^2}$ g) $\sum_{n \geq 0} d_n x^n$ où d_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π .

* **2** Soit $\sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_1 et R_2 , et de sommes respectives $S_1(x)$ et $S_2(x)$.

a) Si $R_1 \neq R_2$, quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$?

b) Quel est le rayon de convergence $\tilde{R}$ de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n$?

Si $R_1 = R_2$, montrer que $R = R_1 = R_2$.

Indication : on pourra montrer et utiliser l'égalité $2S_1(x) = S(x) + A(x)$.

** c) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \rightarrow \ell_1$ et $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \rightarrow \ell_2$.

Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\sqrt{|\ell_1 \ell_2|}}$.

☞ **3** Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières (α est un réel fixé, x une variable réelle) :

a) $\sum_{n \geq 0} n x^n$ b) $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ c) $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n+1} x^n$ d) $\sum_{n \geq 0} \cos(n\alpha) x^n$ e) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n$ f) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

☞ **4** Développer en somme de série entière, en précisant le rayon de convergence, les fonctions définies par $f(x) =$

a) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ b) $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3}$ c) $(1+x)\ln(1+x)$ d) $\ln\left(\frac{2-x}{1-x^2}\right)$

e) $\arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$ f) $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ g) $\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$

☞ **5** Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp(x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt$.

a) Montrer que f est une solution impaire l'équation différentielle $y' = 2xy + 1$.

b) Déterminer le développement en série entière de f et son rayon de convergence.

* **6** Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

À l'aide d'un produit de Cauchy et de l'égalité $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k} = 4^n$.

À l'aide de $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{1-x^2}$, montrer de même que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2(n+1)}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}$.

☞ **7** Soit (E) l'équation différentielle $x y'' - (x+3)y' + 3y = 0$.

a) Déterminer une CNS portant sur la suite (a_n) pour que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E) .

b) Montrer que $x \mapsto e^x$ est solution de (E) , et déterminer une solution polynomiale de degré 3.

c) Quelles sont les solutions de (E) développables en série entière? Quel est leur rayon de convergence?

- * **8**
- a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n \geq 0} x^{3n}$, puis ceux de $f(x) = (1-x) \sum_{n \geq 0} x^{3n}$.
- b) Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{a}{3n+1} + \frac{b}{3n+2}$.
- c) Montrer que $\sum_{n=0}^N \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-x^{3(N+1)}}{1+x+x^2} dx$
- d) Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{3(N+1)}}{1+x+x^2} dx = 0$, et en déduire une expression de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ comme une intégrale.

- * **9** Soit (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et la relation de récurrence $(R_n) : u_{n+1} = u_n + u_{n-1}; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
- a) En multipliant (R_n) par x^{n+1} et en sommant, montrer la relation $f(x)(1-x-x^2) = 2x+1$.
- b) Soit α et β les racines de x^2+x-1 , déterminer le DSE $\frac{2x+1}{x^2+x-1} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta}$.
- c) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- d) On considère cette fois-ci la suite (v_n) définie par $v_0 = 1, v_1 = 3$ et la relation $(R'_n) : v_{n+1} = v_n + v_{n-1} + \frac{1}{n+1}$.
En s'inspirant du calcul précédent, expliquer comment obtenir une expression explicite de v_n .

- * **10** On cherche à expliciter un développement en série entière de $\alpha(x) = (\arcsin x)^2$, sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$.
- a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1-x^2)\alpha''(x) - x\alpha'(x) = 2$.
- b) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n}$, supposée définie sur $] -R, R[$.
Exprimer, pour $x \in] -R, R[$, $(1-x^2)f''(x) - xf'(x)$ comme une somme de série entière; expliciter ses coefficients en fonction des u_n .
- c) En déduire une relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n , puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{4^n ((n-1)!)^2}{2(2n)!}$.
- d) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^{2n}$?

- ** **11** Soit $n \in \mathbb{N}^*, E_n = \{1, \dots, n\}$ et f une *involution* de E_n , c'est-à-dire une *permutation* : une application de E_n dans E_n telle que $f \circ f = Id_{E_n}$.
On appelle t_n le nombre d'involutions que l'on peut définir sur E_n ; $t_0 = 0$ par convention.
On pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$; R est le rayon de convergence de cette série entière.
- a) Calculer t_1 et t_2 . Justifier que $0 \leq t_n \leq n!$, et en déduire que $R \geq 1$.
- b) Montrer que si $n \geq 2$, alors $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$. (*)
- c) En multipliant (*) par $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ puis en sommant cette égalité ($n \geq 2$), montrer que $h'(x) = (1+x)h(x)$.
- d) Déduire de cette égalité et de la valeur de t_0 que $h(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.
À l'aide d'un produit de Cauchy, trouver une expression de t_n sous forme de somme finie.

exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
rayon de convergence	X	X	X					X		X	X
calcul de la somme			X			X		X			
développement en SE				X	X	X	X			X	X
équation différentielle					X		X			X	
équation fonctionnelle									X		X