PT Exercices sur les séries numériques 2024/2025

feuille N° 6

Thème : nature d'une série

☞ **1** Déterminer la *nature* des séries de terme général :

a) $n2^{-n}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ **c)** $\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$ **d)** $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$ **e)** $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\alpha}-(\arctan n)^{\alpha}$ $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$

f) $e^{-\sqrt{n^2+1}}$ **g)** $\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(e^n+1)}$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\,dt$ (majorer l'intégrale) **i)** $\dfrac{|\sin n|+|\cos n|}{n}$ (minorer le terme général)

∗ **2** Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs. Étudier la nature de la série $\sum\sqrt{u_{2n}u_n}$.

Indication : montrer que pour $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

∗ **3** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a>0$; déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{an^2+bn+c}{n^{\alpha}}\right)$.

Thème : télescopages

☞ **4** Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2-1}$ *simplifier* $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ Écrire $\ln\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$ sous la forme $\ln u_n-\ln u_{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ *trouver* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tels que* $\dfrac{2n-1}{n^3-4n}=\dfrac{a}{n-2}+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n+2}$

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{\binom{n}{4}}$ *simplifier* $\dfrac{1}{\binom{n-1}{3}}-\dfrac{1}{\binom{n}{3}}$

∗ **5** **« Constante » d'Euler-Mascheroni**

Montrer la convergence de la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

En déduire qu'il existe un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$.

Thème : critères

☞ **6** **Séries alternées**

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ **b)** $\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$ *(calculer la somme)* **c)** $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$

☞ **7** **Critère de d'Alembert**

En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}$ **b)** $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ **c)** $\dfrac{n^n}{2^{n^2}}$ **d)** $\dfrac{1}{\binom{3n}{2n}}$

Thème : reste de séries convergentes

$**$ **8** On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$.

a) Justifier la convergence de cette série.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Montrer que pour $k \geqslant n+3$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{n!}\frac{1}{k^2}$ et en déduire que $0 \leqslant R_{n+2} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

En conclure que $R_{n-1} \sim \frac{1}{n!}$.

$*$ **9** Montrer la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$; on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$.

Montrer que $\left| n!\sqrt{n+1}.R_n - 1 \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k}$, et en déduire un équivalent simple de R_n.

$*$ **10** On considère deux suites u_n et v_n, cette dernière à termes positifs.

a) On suppose que $\sum v_n$ converge, et que $u_n = o(v_n)$. Les deux séries de terme général u_n et v_n convergent alors, et on pose $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Montrer que $R_n(u) = o\left(R_n(v)\right)$.

b) On suppose que $\sum v_n$ converge, et que $u_n \sim v_n$. Montrer que $R_n(u) \sim R_n(v)$.

c) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ si $\alpha > 1$.

Thème : divers

$*$ **11** **Série des racines d'une équation polynomiale**

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$ sur $[0;1]$. Que valent $f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$ et $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$, appelée u_n.

c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ a pour limite 0.

d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

☞ **12** **La formule de Stirling**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $u_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ; en déduire que $(a_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

b) *On admettra la formule de Wallis :* $\frac{(2^n.n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Simplifier $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ et en déduire que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

c) Montrer la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.