

PT Exercices sur les séries numériques (solutions)
2024/2025
1 Déterminer la *nature* des séries de terme général :

- a) $n2^{-n}$ b) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ c) $\ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right)$ d) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$ e) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
 f) $e^{-\sqrt{n^2+1}}$ g) $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(e^n+1)}$ h) $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt$ (majorer l'intégrale) i) $\frac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$ (minorer le terme général)

Réponse : a) $n2^{-n}$ n'a pas d'équivalent plus simple, mais comme $n^2 \cdot n \cdot 2^{-n} = n^3 \cdot 2^{-n} \rightarrow 0$ (croissances comparées), $n \cdot 2^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = 1$), donc $\sum_{n \geq 1} n(n-1)2^{-n}$ converge.

$$b) \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2}$), donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ converge.

c) $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $n \sin \frac{1}{n} \sim 1$; alors $\ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) \sim n \sin \frac{1}{n} - 1$.

Pour obtenir un équivalent simple du terme général de la suite, il est nécessaire d'utiliser un développement limité : $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o_0(u^3)$ donc $\frac{\sin(u)}{u} - 1 = -\frac{u^2}{6} + o_0(u^2)$, et donc $\ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{6n^2}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (cas de Riemann

avec $\alpha = 1$), donc $\sum_{n \geq 1} \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right)$ converge.

d) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$ est de la forme $\ln(1+h_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$.

$$\text{Alors } \ln(1+h_n) \sim h_n; \text{ or } h_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+3} - 1 = \frac{-2}{n^2+n+3} \sim -\frac{2}{n^2}.$$

Remarquons que h_n et donc $\ln(1+h_n)$ est négatif, ce qui légitime la comparaison par équivalent.

Comme $\sum \frac{2}{n^2}$ converge, $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$ converge.

e) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: on soustrait ici deux suites équivalentes.

$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - x^\alpha}{\frac{\pi}{2} - x}$ est le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ en $\frac{\pi}{2}$, donc tend vers $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que $\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - x^\alpha \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Par ailleurs, $\frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha \sim \frac{\alpha}{n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha-1}$ d'où la **divergence de la série**.

f) $0 \leq \sqrt{n^2+1} \geq n$, donc $e^{-\sqrt{n^2+1}} \leq e^{-n}$, et $\sum_{n \geq 0} e^{-n}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n^2+1}}$ converge (on évite de rechercher un équivalent simple de $e^{-\sqrt{n^2+1}}$, ce qui n'est pas infaisable : $n - \sqrt{n^2+1} \rightarrow 0$, donc $e^{-\sqrt{n^2+1}} \sim e^{-n}$).

g) $\ln(e^n+1) - n = \ln \frac{e^n+1}{e^n} \rightarrow 0$ donc $\ln(e^n+1) \sim n$;

De même, $\ln(n^2+1) \sim 2 \ln n$ donc $\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(e^n+1)} \sim \frac{2 \ln n}{n}$, et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(e^n+1)}$ diverge.

h) $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt$: Comme $\operatorname{ch} t \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \leq \sin t$ donc par intégration $0 \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sin t dt = 1 - \cos \frac{1}{n}$, or $1 - \cos u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ donc $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge, on en déduit la **convergence de la série**.

i) $\frac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$ Comme $|\sin n| \leq 1$ donc $|\sin n| \geq \sin^2 n$ et de même $|\cos n| \geq \cos^2 n$ donc $|\sin n| + |\cos n| \geq \sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Finalement $\frac{|\sin n| + |\cos n|}{n} \geq \frac{1}{n}$, et **la série diverge**.

* **2** Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs. Étudier la nature de la série $\sum \sqrt{u_{2n} u_n}$.

Indication : montrer que pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Réponse : Pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ donc $0 \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Appliquons ceci à $a = u_n, b = u_{2n} : 0 \leq \sqrt{u_{2n}u_n} \leq \frac{u_{2n} + u_n}{2}$

Or $\sum u_n$ converge, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{p=0}^{2n} u_{2p} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2n}$ donc les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_{2n}$ sont bornées, donc $\sum u_{2n}$ converge. En appliquant le théorème de comparaison par majoration, $\boxed{\sum \sqrt{u_{2n}u_n} \text{ converge}}$

* **3** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a > 0$; déterminer la nature de la série de terme général $\ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right)$.

Réponse : Comme $a > 0$, pour n suffisamment grand, $\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} > 0$, ce qui justifie l'existence de la série.

Comme $\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \sim \frac{a}{n^{\alpha-2}}$, on sait que si $\alpha < 2$, alors $\ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right) \rightarrow +\infty$, et alors la série diverge grossièrement;

si $\alpha = 2$, alors $\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \rightarrow a$, et la série $\sum \ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right)$ diverge grossièrement si $a \neq 1$;

si $\alpha = 2$ et $a = 1$, alors $\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} = \frac{n^2 + bn + c}{n^2} = 1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}$, donc $\ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right) = \frac{b}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Il en résulte que $\sum \ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right)$ converge si, et seulement si $b = 0$.

Enfin, si $\alpha > 2$, alors $\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}} \left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right)$, donc

$\ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right) = (2 - \alpha) \ln n + a + \frac{b}{n} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \rightarrow -\infty$, et la série diverge grossièrement.

Finalement $\boxed{\sum \ln \left(\frac{an^2 + bn + c}{n^\alpha} \right) \text{ converge si, et seulement si, } \alpha = 2, a = 1 \text{ et } b = 0.}$



4 Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme :

a) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ simplifier $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

b) $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right)$ Écrire $\ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right)$ sous la forme $\ln u_n - \ln u_{n+1}$

c) $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$ trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{2n-1}{n^3 - 4n} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$

d) $\sum_{n \geq 4} \frac{1}{\binom{n}{4}}$ simplifier $\frac{1}{\binom{n-1}{3}} - \frac{1}{\binom{n}{3}}$

Réponse : a) Convergence :

$\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$, or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = 1$) donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2-1}$ converge.

Valeur : $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ pour $n \geq 2$, donc (en posant $p = n-1$ et $q = n+1$)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m \frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^m \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^m \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^m \frac{1}{p} - \left(\sum_{n=3}^{m-1} \frac{1}{q} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \end{aligned} \quad \boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}}$$

b) Convergence : Pour $n \geq 2$, $n(n+1) \geq 6$ donc $0 \leq \frac{2}{n(n+1)} \leq \frac{1}{3}$ et donc $\ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right)$ est définie et négative.

De plus, $\ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) \sim -\frac{2}{n(n+1)} \sim -\frac{2}{n^2}$ d'où la convergence de $\sum_{n \geq 3} \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right)$.

Valeur : $\ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = \ln \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \ln \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \ln \frac{n+2}{n} - \ln \frac{n+1}{n-1}$ donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$:

$$\sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=2}^N \ln \frac{n+2}{n} - \ln \frac{n+1}{n-1} = \ln \frac{N+2}{N} - \ln 3. \text{ Donc } \boxed{\sum_{n=3}^N \ln \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = -\ln 3}$$

c) Convergence : $\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{2}{n^2}$, or $\sum \frac{2}{n^2}$ converge, donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge.

Valeur : $\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$. On détermine a en multipliant cette égalité par $n-2$ et en remplaçant n par 2 : $\frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{2n-1}{n^2+2n} = a + b \frac{n-2}{n} + c \frac{n-2}{n+2}$ donc avec $n=2$: $a = \frac{3}{8}$.

On trouve de même $b = \frac{1}{4}$ puis $c = -\frac{5}{8}$. Alors, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^N \frac{2n-1}{n^3-4n} &= \frac{3}{8} \sum_{n=3}^m \frac{1}{n-2} + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^m \frac{1}{n} + c \sum_{n=3}^N \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{8} \sum_{m=1}^{N-2} \frac{1}{m} + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} - \frac{5}{8} \sum_{p=5}^{N+2} \frac{1}{p} \\ &= \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{m=5}^{N-2} \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{n=5}^{N-2} \frac{1}{n} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right) \cdots \\ &\quad \cdots - \frac{5}{8} \left(\sum_{p=5}^{N+2} \frac{1}{p} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right) - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right) \\ &= \frac{89}{96} + R_N \text{ avec } \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0, \text{ donc } \boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}} \end{aligned}$$

d) Convergence : $\frac{1}{\binom{n}{4}} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sim \frac{24}{n^4}$, or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge, donc par comparaison du terme positifs $\frac{1}{\binom{n}{4}}$ avec un terme convergent de série de Riemann, $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\binom{n}{4}} \text{ converge.}}$

$$\begin{aligned} \text{Valeur : } \frac{1}{\binom{n-1}{3}} - \frac{1}{\binom{n}{3}} &= \frac{6(n-4)!}{(n-1)!} - \frac{6(n-3)!}{n!} \\ &= \frac{6(n-4)!}{n!} (n - (n-3)) \\ &= \frac{24(n-4)!}{n!} \left(\frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{\binom{n}{4}} \end{aligned}$$

Donc, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$:

$$\sum_{n=4}^N \frac{1}{\binom{n}{4}} = \frac{4}{3} \sum_{n=4}^N \frac{1}{\binom{n-1}{3}} - \frac{1}{\binom{3}{3}} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\binom{3}{3}} - \frac{1}{\binom{N}{3}} \right). \text{ En passant à la limite quand } N \text{ tend vers } +\infty : \boxed{\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{4}} = \frac{4}{3}}.$$

* **5 « Constante » d'Euler-Mascheroni**

Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

En déduire qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Réponse : Pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, différence de deux suites équivalentes.

Nous avons besoin d'un DL2 de $\ln(1-x)$ en 0 :

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, ce qui assure que la série à termes négatifs $\sum u_n$ converge par comparaison (équivalents) avec une série convergente de Riemann.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \ln(k-1) - \ln k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \ln 1 - \ln n$ et par ailleurs, $\sum_{k=2}^n u_k \rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} u_k = S$.

On en déduit que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^n u_k + \ln n = \ln n + S + o(1)$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + S + \ln n + o(1)$.

 6 Séries alternées

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\frac{(-1)^n}{n \ln n}$

b) $\frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}$ (calculer la somme)

c) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

Réponse : a) $\left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante, de limite nulle, donc $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge.

b) Soit $u_n = \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$, alors $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, donc (u_n) est décroissante, de limite nulle en $+\infty$, et bien sûr positive. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k+1)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{(-1)^l}{l}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k+1)}{k(k+1)} = -1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{l=2}^n \frac{(-1)^l}{l} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \text{ et, en passant à la limite quand } n \text{ tend}$$

vers $+\infty$: $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k+1)}{k(k+1)} = -1$.

c) Après changement de variable $u = t + n\pi$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u+n\pi)}{\sqrt{u+n\pi}} du = (-1)^n v_n, \text{ avec } v_n = \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}} du.$$

Comme $\frac{\sin u}{\sqrt{u+(n+1)\pi}} \leq \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0, \pi]$, on obtient la décroissance de (v_n) par

intégration ; et comme $0 \leq \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}} \leq \frac{\sin u}{\sqrt{n\pi}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration donne $0 \leq v_n \leq$

$$\frac{2}{\sqrt{n\pi}} \text{ donc par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Le théorème spécial des séries alternées permet de conclure à la convergence de $\sum (-1)^n v_n$.

 7 Critère de d'Alembert

En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\prod_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$

b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

c) $\frac{n^n}{2^{n^2}}$

d) $\frac{1}{\binom{3n}{2n}}$

Réponse : a) En posant $u_n = \prod_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$ pour $n \geq 2$, alors $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$\sum u_n$ converge absolument.

b) Avec $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4} < 0. \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ converge absolument.}$$

c) Avec $u_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{2^{(n+1)^2 - n^2}} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2} \frac{n}{2^n}$ qui tend

vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\sum \frac{n^n}{2^{n^2}}$ converge absolument.

d) avec $v_n = \left(\frac{3n}{2n}\right)^{-1} > 0$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)!(n+1)!(3n)!}{(3n+3)!(2n)!n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{2}{3} \frac{(2n+1)(n+1)}{(3n+2)(3n+1)} \rightarrow \frac{8}{27} < 1.$$

$\sum \left(\frac{3n}{2n}\right)^{-1}$ converge.

** **8** On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$.

a) Justifier la convergence de cette série.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Montrer que pour $k \geq n+3$, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} \frac{1}{k^2}$ et en déduire que $0 \leq R_{n+2} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

En conclure que $R_{n-1} \sim \frac{1}{n!}$.

Réponse :

a) $n! \geq 2^n$ par récurrence sur $n \geq 4$, donc $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$, d'où la convergence de $\sum \frac{1}{n!}$.

b) Pour $k \geq n+3$, $k! = n!(n+1)(n+2) \cdots k \geq n!(n+1)(n+2)k \geq n!(n+1)(k-1)k$; par ailleurs, $(n+1)k(k-1) - nk^2 = nk^2 - nk + k^2 - k - nk^2 = (k-n-1)k \geq 0$, donc $k! \geq n!nk^2$ et $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} \frac{1}{k^2}$.

$$\text{Alors } R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + R_{n+3}.$$

Or, d'après le calcul ci-dessus, $0 \leq R_{n+2} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{n} \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge; en appelant S_2 sa somme, $0 \leq R_{n+2} \leq \frac{1}{n!} \frac{S_2}{n}$ donc $R_{n+2} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$ donc $R_{n-1} \sim \frac{1}{n!}$.

* **9** Montrer la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$; on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$.

Montrer que $|n! \sqrt{n+1} R_n - 1| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k}$, et en déduire un équivalent simple de R_n .

Réponse : $n! \geq 2^n$ par récurrence sur $n \geq 4$, donc $0 \leq \frac{\sqrt{k}}{k!} \leq \frac{\sqrt{k}}{2^k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{2^k}}\right)$, d'où la convergence de $\sum \frac{\sqrt{k}}{k!}$.

Pour $n \geq 1$, $n!\sqrt{n+1}.R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!\sqrt{n+1}\sqrt{k}}{k!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!\sqrt{n+1}\sqrt{k}}{k!}$.

Or pour $k \geq n+2$, $\frac{n!\sqrt{n+1}\sqrt{k}}{k!} \leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}} \prod_{j=n+2}^k \frac{1}{j} \leq \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} \prod_{i=2}^k \frac{1}{n+i} \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{k-1}} = \frac{1}{(n+1)^k}$.

Donc $0 \leq n!\sqrt{n+1}.R_n - 1 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}$

On en tire que $n!\sqrt{n+1}.R_n - 1 = o(1)$, donc $n!\sqrt{n+1}.R_n \sim 1$ et $R_n \sim \frac{1}{n!\sqrt{n+1}}$.

* **10** On considère deux suites u_n et v_n , cette dernière à termes positifs.

a) On suppose que $\sum v_n$ converge, et que $u_n = o(v_n)$. Les deux séries de terme général u_n et v_n convergent alors, et on pose $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Montrer que $R_n(u) = o(R_n(v))$.

b) On suppose que $\sum v_n$ converge, et que $u_n \sim v_n$. Montrer que $R_n(u) \sim R_n(v)$.

c) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ si $\alpha > 1$.

Réponse :

a) Comme $u_n = o(v_n) : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon v_n$.

Alors, pour $n \geq p$, $0 \leq |R_n(u)| \leq R_n(|u|) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon v_k \leq \varepsilon R_n(v)$. Donc $R_n(u) = o(R_n(v))$

b) $u_n \sim v_n$ s'écrit $|u_n - v_n| = o(v_n)$, et d'après la question précédente

$|R_n(u) - R_n(v)| = |R_n(u - v)| \leq R_n(|u - v|) = o(R_n(v))$, donc $R_n(u) \sim R_n(v)$

c) Pour $k \leq t \leq k+1$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$, puis par intégration : (1) $\frac{1}{k^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$.

Or pour $m > n \geq 0$ (et $\alpha > 1$) : $\sum_{k=n+1}^m \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{n+1}^{m+1}$ qui tend vers

$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ quand m tend vers $+\infty$, on en déduit par sommation de (1) :

$\rho_n \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geq \rho_{n+1}$ et donc $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \geq \rho_n \geq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ et enfin

$1 \geq (\alpha-1)n^{\alpha-1}\rho_n \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1}$. Le théorème d'encadrement aboutit donc à $\rho_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

* **11** Série des racines d'une équation polynomiale

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$ sur $[0; 1]$. Que valent $f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$ et $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$, appelée u_n .

c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ a pour limite 0.

d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Réponse :

- a) f_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$, et $f'_n(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n} > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus, $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n^{n/2}} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n^{n/2}} - \frac{1}{2} < 0$; $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{n/2}} + 1 - 1 = \frac{1}{n^{n/2}} > 0$; et enfin $f_n(1) = 1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} > 0$.

- b) D'après le théorème de la bijection monotone, f_n admet donc une unique racine sur $[0; 1]$, qui est encadrée par $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$: $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- c) Le théorème d'encadrement appliqué à ce résultat montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- d) Puisque $u_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et que $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge, $\sum u_n$ diverge par comparaison.

12 La formule de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $u_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$.

- a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge; en déduire que $(a_n)_{n \geq 1}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

- b) On admettra la formule de Wallis : $\frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Simplifier $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ et en déduire que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

- c) Montrer la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

- d) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Réponse :

- a) $u_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{(n+1)!e^{n+1} n^n \sqrt{n}}{n!e^n (n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}} = \ln \frac{(n+1)e^{n+1/2}}{(n+1)(n+1)^{n+1/2}}$

$u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n}$. En utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$,

$$u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\text{donc } u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum u_n$ converge par application de la règle de comparaison.

Or $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \ln a_{k+1} - \ln a_k = \ln a_{n+1} - \ln a_1$, qui tend vers une limite finie S par convergence de $\sum u_n$; alors $\ln a_n \rightarrow S + \ln a_1$, donc $a_n \rightarrow \ell = e^S \cdot a_1$.

- b) $\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2 e^{2n} (2n)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)! e^n n^{2n} n} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} = \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n}}\right) \cdot 2$ qui tend vers $\sqrt{2\pi}$ d'après la formule de Wallis.

Or $a_n^2 \rightarrow \ell^2$, et $a_{2n} \rightarrow \ell$, donc $\frac{a_n^2}{a_{2n}} \rightarrow \ell$; on en déduit donc que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

- c) Comme $a_n \sim \ell = \sqrt{2\pi}$, on aboutit à $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

- d) Alors $(n!)^{1/n} = \frac{n}{e} \left(\sqrt{\pi n}\right)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$, et $0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{e}{n}$; donc $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge par comparaison avec la série harmonique.