PT Exercices sur les courbes planes 2024/2025

feuille N° 5

1 On considère l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

a) Écrire un paramétrage $M(t)$ de $\mathscr{E}$.

b) On considère les foyers F et F' de $\mathscr{E}$. Montrer que $M\in\mathscr{E} \iff MF+MF'=6$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}(t)$ et de la normale $\mathscr{N}(t)$ à $\mathscr{E}$ en $M(t)$.

d) Montrer que $\mathscr{N}(t)$ est bissectrice des droites $(M(t),F)$ et $(M(t),F')$.

Thème : tracé

☞ **2** Étudier les courbes paramétrées définies par :

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^2+\dfrac{1}{t^2}\end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad \textbf{b)}\ \mathscr{L}:\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^4} \\ y=\dfrac{t^3}{1+t^4}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

c) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{L}$ est $(x^2+y^2)^2=xy$.

Thème : enveloppes

3 Déterminer l'enveloppe de la famille de droites définie par :

a) ☞ $x-y\sin t=\cos t$, t décrit $\mathbb{R}$ (vérifier que $x^2-y^2=1$)

b) $*$ Les équations $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p(\alpha)$ (p est une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$; interpréter géométriquement α et $p(\alpha)$)

c) $**$ d'un rayon de roue de bicyclette qui roule sans glisser, assimilé à la droite supportée par le diamètre de la roue.

d) $**$ de l'image du faisceau de droites verticales $x=\cos\alpha$ par réflexion sur le demi-cercle $x^2+y^2=1, y\leqslant 0$.

Thème : rectification

$*$ **4** On considère $p\in\mathbb{R}_+^*$, et la parabole $\mathscr{P}$ paramétrée par $x(t)=t, y(t)=\dfrac{t^2}{2p}$.

a) Déterminer en tout point $M(t)$ de $\mathscr{P}$ la base de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$.

b) On projette depuis le haut un faisceau lumineux vertical, qui se réfléchit sur la parabole assimilée à un miroir parfait. Soit $\vec{r}(t)$ le vecteur réfléchi en $M(t)$; montrer que $\vec{r}=2(\vec{N}\cdot\vec{j})-\vec{j}$ et en déduire une équation cartésienne de la droite portée par le rayon réfléchi.

c) Montrer que tous les rayons réfléchis passent par le foyer de la parabole.

$*$ **5** Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$; rectifier (*ie* en déterminer l'abscisse curviligne) les courbes définies par

$$\mathscr{C}_{5a}:\begin{cases} x(t)=a(t-\operatorname{th}(t)) \\ y=\dfrac{a}{\operatorname{ch}(t)}\end{cases} \qquad \mathscr{C}_{5b}: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

Indication pour $\mathscr{C}_{5b}$ *:* déterminer un paramétrage en posant $x=a\cos^3(t)$.

6 On considère les courbes définies par :

$$\mathscr{C}_{6a}:\begin{cases} x(t)=\cos(2t)+2\cos t \\ y(t)=\sin(2t)-2\sin t\end{cases} \qquad \mathscr{C}_{6b}: 2\mathrm{e}^{x+y}=(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)$$

a) Déterminer la base de Frenet de ces deux courbes, et en déduire la courbure au point courant;

b) Déterminer un paramétrage de la développée de ces courbes.

Indication pour $\mathscr{C}_{6b}$ *:* poser $t=\mathrm{e}^x$, et exprimer y en fonction de t.

Thème : angle α, et courbes définies par une condition

7 Soit γ un arc paramétré birégulier. On pose $\alpha = \langle \vec{\imath}, \vec{T} \rangle$.

a) Calculer α pour la courbe $\mathscr{C}_{6a}$ de l'exercice **6)**, et retrouver l'expression de la courbure.

Même question pour la courbe $\mathscr{C}_{6b}$ (Indication : si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, alors $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$).

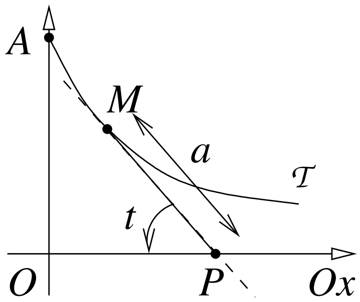
b) Déterminer les courbes planes définies par la condition *(équation intrinsèque)* $R = s$.

——————— • ———————

** **8** ***Tractrice de chaînette***

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On recherche une courbe T du quadrant $x > 0, y > 0$ décrite par un point M, qui vérifie les conditions :

$$\begin{cases} (1) & T \text{ passe par le point } A : (0, a) \\ (2) & \text{Soit } P \text{ l'intersection de la tangente à } T \text{ en } M \text{ avec l'axe } O_x, \\ & \text{alors } \|MP\| = cte = a. \end{cases}$$



On pose $t = \langle \widehat{\overrightarrow{PM}, -\vec{\imath}} \rangle$.

a) Montrer que les coordonnées de M sont sous la forme $(\psi(t), a\sin t)$; déterminer qu'une condition sur ψ équivalente à (2) est $a\cos^2(t) + \sin t\,\psi'(t) = 0$.

b) En déduire qu'une paramétrisation de T est $\left(x(t) = -a\left(\cos t + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}\right), y(t) = a\sin t\right)$.

c) Rectifier T, et montrer que la développée de T admet pour équation cartésienne $y = a\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Thème : courbes, angle α et complexes – courbes semblables à leur développée

* **9** **Spirale logarithmique**

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$; on considère la courbe paramétrée $\mathscr{S}$ définie par $\begin{cases} x(t) &= e^{-mt}\cos t \\ y(t) &= e^{-mt}\sin t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a) On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Exprimer $z(t+2\pi)$ en fonction de $z(t)$ et en déduire que $M(t+2\pi)$ et l'image de $M(t)$ par une similitude à préciser.

b) Déterminer la tangente $\mathscr{T}_t$ à $\mathscr{S}$ en $M(t)$, et montrer que $\mathscr{T}_t$ fait un angle constant φ avec $(OM(t))$.

c) Déterminer en $M(t)$: la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$, l'angle α, le rayon et le centre de courbure.

d) Montrer que $\mathscr{S}$ est semblable à sa développée $\mathscr{S}'$, c'est-à-dire que $\mathscr{S}'$ est l'image de $\mathscr{S}$ par une rotation/une homothétie.

——————— • ———————

** **10** **Hypocycloïdes**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la courbe paramétrée $\mathscr{H}_p$ définie par $\begin{cases} x(t) &= \cos(pt) - p\cos t \\ y(t) &= \sin(pt) + p\sin t \end{cases}$.

a) Montrer que la courbe $\mathscr{H}_p$ est fermée, et symétrique par rapport à l'axe O_x. Sur quel intervalle l'étudier ?

b) On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, z\left(t + \dfrac{2\pi}{p+1}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{p+1}} z(t)$ et en déduire que $\mathscr{H}_p$ est invariante par rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{p+1}$. Sur quel intervalle minimal étudier $\mathscr{H}_p$?

c) Montrer que $z'(t) = 2ip\cos\left(\dfrac{p+1}{2}t\right)e^{i\frac{p-1}{2}t}$, et en déduire quels sont les points singuliers de $\mathscr{H}_p$.

Déterminer la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$ en un point régulier de $\mathscr{H}_p$. Quel est l'angle α ?

d) Si $p \geqslant 1$, exprimer le rayon de courbure, puis le centre de courbure en un point régulier.

e) Montrer que $\mathscr{H}_p$ est semblable à sa développée.

f) Déterminer la tangente à $\mathscr{H}_p$ en $M\left(\dfrac{\pi}{p+1}\right)$.