

PT

Exercices sur les courbes planes (solutions)

2024/2025

feuille N° 5

1 On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- Écrire un paramétrage $M(t)$ de $\mathcal{E}$.
- On considère les foyers F et F' de $\mathcal{E}$. Montrer que $M \in \mathcal{E} \iff MF + MF' = 6$.
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}(t)$ et de la normale $\mathcal{N}(t)$ à $\mathcal{E}$ en $M(t)$.
- Montrer que $\mathcal{N}(t)$ est bissectrice des droites $(M(t), F)$ et $(M(t), F')$.

Réponse :

a) Un paramétrage de $\mathcal{E}$ est $(x(t), y(t)) = (3 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

b) $MF + MF' = 6$ équivaut à $MF' = 6 - MF$, puis $(MF')^2 = (6 - MF)^2$ (et $MF \leq 6$); $(MF')^2 = (6 - MF)^2$ équivaut à $(MF')^2 = 36 - 12MF + (MF)^2$, soit $(MF')^2 - MF^2 - 36 = 12MF$, et enfin à $12^2.MF^2 = ((MF')^2 - MF^2 - 36)^2$, plus facile à vérifier que l'égalité de départ. En effet : $(MF')^2 - MF^2 - 36 = (x + \sqrt{5})^2 + y^2 - ((x - \sqrt{5})^2 + y^2) - 36 = x^2 + 2\sqrt{5}x + y^2 - (x^2 - 2\sqrt{5}x + y^2) - 36 = 4\sqrt{5}x - 36$, donc $((MF')^2 - MF^2 - 36)^2 = 16(\sqrt{5}x - 9)^2 = 16(5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81)$; alors $((MF')^2 - MF^2 - 36)^2 - 12^2.MF^2 = 16(5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81) - 16 \times 9(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + y^2) = 16(5x^2 - 9x^2 - 18\sqrt{5}x + 18\sqrt{5}x + 81 - 45 - 9y^2) = 16(-4x^2 - 9y^2 + 36) = 0$.

c) La tangente $\mathcal{T}(t)$ à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est dirigée par $\vec{M}'(t)$, donc admet pour équation cartésienne :

$$\det(\overrightarrow{MX}, \vec{M}') = \begin{vmatrix} x - 3 \cos t & y - 2 \sin t \\ -3 \sin t & 2 \cos t \end{vmatrix} = 0 \text{ donc } 2 \cos(t)x + 3 \sin(t)y = 6 \cos^2 t + 6 \sin^2 t = 6.$$

La normale $\mathcal{N}(t)$ à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ a pour équation cartésienne : $\overrightarrow{MX} \cdot \vec{M}' = 0$ soit $-3 \sin(t)x + 2 \cos(t)y = 5 \sin t \cos t$.

d) Il s'agit de montrer que l'angle α entre $(M(t), F)$ et $\vec{N}(t)$ d'une part, et l'angle β entre $(M(t), F')$ et $\vec{N}(t)$ sont égaux. Comparons leurs cosinus :

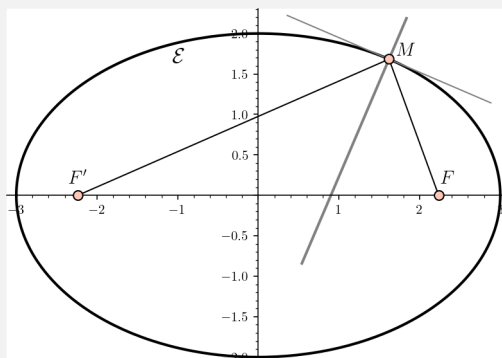
$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MF} \cdot \vec{N}(t)}{\|\vec{N}(t)\| \|\overrightarrow{MF}\|}, \text{ or } \overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 3 \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N}(t) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} \text{ où } k^2 = 4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t = 4 + 5 \sin^2 t.$$

$$\overrightarrow{MF} \cdot \vec{N}(t) = \frac{1}{k} (2 \cos t (3 \cos t - \sqrt{5}) + 6 \sin^2 t) = -\frac{1}{k} (6 - 2\sqrt{5} \cos t), \text{ et } \overrightarrow{MF}^2 = (\sqrt{5} - 3 \cos t)^2 + 4 \sin^2 t = 5 - 6\sqrt{5} \cos t + 9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 9 - 6\sqrt{5} \cos t + 5 \cos^2 t = (3 - \sqrt{5} \cos t)^2.$$

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{MF'} \cdot \vec{N}(t)}{\|\vec{N}(t)\| \|\overrightarrow{MF'}\|}, \text{ or } \overrightarrow{MF'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} - 3 \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MF'} \cdot \vec{N}(t) = \frac{1}{k} (2 \cos t (3 \cos t + \sqrt{5}) + 6 \sin^2 t) = \frac{1}{k} (6 + 2\sqrt{5} \cos t), \text{ et } \overrightarrow{MF'}^2 = (\sqrt{5} + 3 \cos t)^2 + 4 \sin^2 t = 5 + 6\sqrt{5} \cos t + 9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 9 + 6\sqrt{5} \cos t + 5 \cos^2 t = (3 + \sqrt{5} \cos t)^2. \text{ Finalement}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4 + 5 \sin^2 t}} = \cos \beta : (M(t), \mathcal{N}(t)) \text{ est bissectrice des droites } (M(t), F) \text{ et } (M(t), F').$$



Thème : tracé

2 Étudier les courbes paramétrées définies par :

$$\text{a)} \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{b)} \mathcal{L} : \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{L}$ est $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

Réponse : d) x et y sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^* : x'(t) = 2(t+1)$ et $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = 2\frac{t^4-1}{t^3}$,

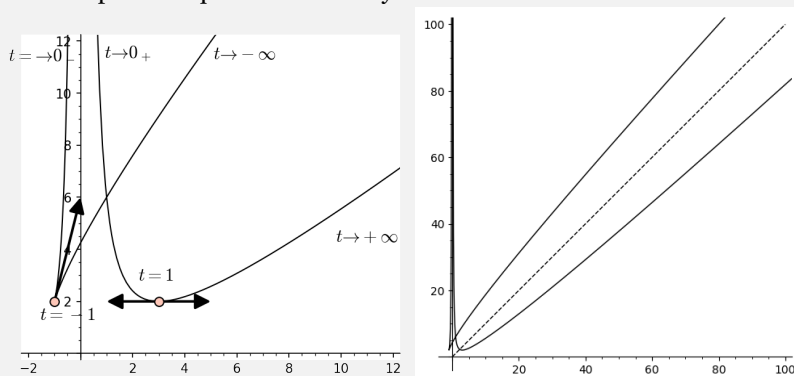
d'où le tableau de variations simultanées :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$+$				
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$ $	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

d'où le tableau de variations simultanées :

Il y a des asymptotes en $t = 0$ et en $t \rightarrow \pm\infty$. En $t = 0$, l'asymptote est verticale d'équation $x = 0$.

En $\pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 1$ et $y - x = \frac{1}{t^2} - 2t \sim -2t$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} y - x = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} y - x = +\infty$. Ceci correspond à une branche parabolique de direction $y = x$.

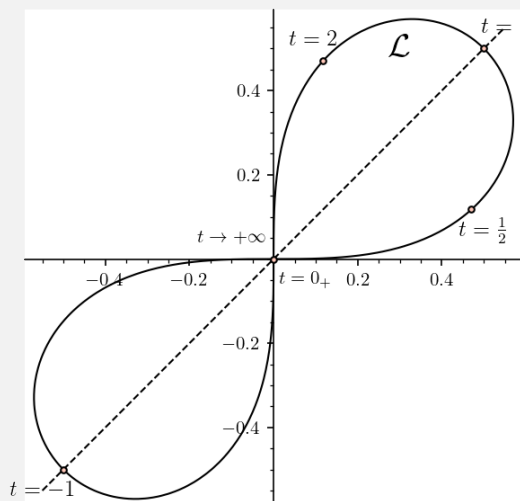


e) $M(-t) = \left(\frac{-t}{1+t^4}, \frac{-t^3}{1+t^4} \right) = -M(t)$ est l'image de $M(t)$ par une symétrie de centre O . Il suffit d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+$.

$M\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}}, \frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}} \right) = \left(\frac{t^3}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^4} \right)$ est l'image de $M(t)$ par la symétrie d'axe $y = x$. Il suffit d'étudier la courbe sur $[0; 1]$. x et y sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$x'(t) = \frac{1}{(1+t^4)^2} (1+t^4 - t \cdot (4t^3)) = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}$ et $y'(t) = \frac{1}{(1+t^4)^2} (3t^2(1+t^4) - t^3 \cdot (4t^3)) = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}$, d'où le tableau de variations simultanées /le graphe :

t	0	$3^{-1/4}$	1		
$x'(t)$	1	+	0	-	$-\frac{1}{2}$
$x(t)$	$3^{-1/4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$3^{-3/4}$
$y'(t)$	0	+		+	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	$3^{-1/4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$3^{-3/4}$



Enfin

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{t^2(1+t^4)}{(1+t^4)^2} = x(t)y(t).$$

Thème : enveloppes

3 Déterminer l'enveloppe de la famille de droites définie par :

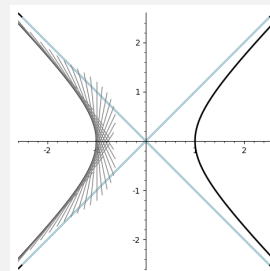
- a) $x - y \sin t = \cos t$, t décrit $\mathbb{R}$ (vérifier que $x^2 - y^2 = 1$)
- b) * Les équations $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\alpha)$ (p est une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$; interpréter géométriquement α et $p(\alpha)$)
- c) ** d'un rayon de roue de bicyclette qui roule sans glisser, assimilé à la droite supportée par le diamètre de la roue.
- d) ** de l'image du faisceau de droites verticales $x = \cos \alpha$ par réflexion sur le demi-cercle $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

Réponse. La droite d'équation $x - y \sin t = \cos t$ passe par le point $M(t) : \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) et est dirigée par $\vec{u}(t) : \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{M}'(t) : \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'(t) : \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$;
 ainsi $\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos t$ et $\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t)) =$
 $\begin{vmatrix} -\sin t & \sin t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin t$, puis $\lambda(t) = \tan t$ pour tout $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

On trouve le paramétrage : $A(t) : \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + \tan t \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

On vérifie que $x^2 - y^2 = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$, donc l'enveloppe des droites est une hyperbole équilatère.

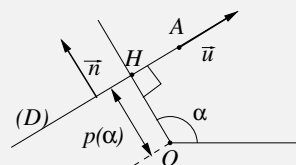


- b) Soit (D_α) la droite d'équation cartésienne $x \cos \alpha - y \sin \alpha = p(\alpha)$, M un point de D_α , et H le projeté orthogonal de O sur (D_α) .

$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ est un vecteur unitaire et normal à (D_α) , donc $X \in (D_\alpha) \iff \overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = p(\alpha)$, donc $p(\alpha) = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = OH$ est l'écart entre O et $H : |p(\alpha)| = d(O, (D))$. α est l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{n}$.

Posons $\vec{I}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{J}_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, alors $(\vec{I}_\alpha, \vec{J}_\alpha)$ est une base orthonormée directe.

La droite D_α passe donc par le point $M : p(\alpha) \vec{I}_\alpha$, et est dirigée par $\vec{J}_\alpha$; alors $\vec{M}' = p'(\alpha) \vec{I}_\alpha + p(\alpha) \vec{J}_\alpha$, et $\vec{u}' = -\vec{I}_\alpha$, puis $\det(\vec{u}', \vec{u}) = \det(\vec{J}_\alpha, -\vec{I}_\alpha) = 1$ et $\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t)) = \det(p'(\alpha) \vec{I}_\alpha, \vec{J}_\alpha) = p'(\alpha)$; ainsi $\lambda(\alpha) = -p'(\alpha)$, et l'enveloppe est paramétrée par $\alpha \mapsto A = p(\alpha) \vec{I}_\alpha - p'(\alpha) \vec{J}_\alpha$.



- c) Quitte à changer l'unité de longueur, on suppose que la rayon de la roue vaut 1. Par hypothèse, lorsqu'elle avance de t , la roue subit autour de son point central $C(t)$ une rotation d'angle t . Comme le rayon est en $t = 0$ dirigé par $-\vec{j}$, on obtient $\overrightarrow{OC}(t) = t \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{CM}(t) = -\sin t \vec{j} - \cos t \vec{j}$.

La droite portant le rayon passe par $C(t)$ et est dirigée par $\vec{u} = \overrightarrow{MC}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$; donc $\vec{C}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $\det(\vec{u}', \vec{u}) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$ et $\det(\vec{C}'(t), \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t$; ainsi $\lambda(t) = \cos t$, et l'enveloppe est paramétrée par $t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \cos t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2t - \sin(2t) \\ 1 - \cos(2t) \end{pmatrix}$.

En posant $t = 2u$, le paramétrage devient $2x = u - \sin u$ et $2y = 1 - \cos u$ et on reconnaît une cycloïde (cf. fig 3.3)

- d) Le rayon incident au point $M(t) = (\cos t, \sin t)$ est dirigé par $\vec{j}$, et le vecteur normal en ce point n'est autre que $\vec{n}_t = \overrightarrow{OM}$ (puisque M décrit un cercle). Le rayon réfléchi $\vec{r}_t$ vérifie alors $\vec{r}_t + \vec{j} = 2(\vec{j} \cdot \vec{n}_t) \vec{n}_t$, donc $\vec{r}_t = (2 \cos t \sin t, 2 \sin^2 t - 1) = (\sin(2t), -\cos(2t))$.

Ici $\vec{M}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'(t) = 2 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$; alors $\det(\vec{u}', \vec{u}) = 2 \begin{vmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{vmatrix} = 2$

et $\det(\vec{M}'(t), \vec{u}) = \begin{vmatrix} -\sin t & \sin(2t) \\ \cos t & -\cos(2t) \end{vmatrix} = \cos(2t) \sin t - \cos t \sin(2t) = \sin(t - 2t) = -\sin t$; ainsi $\lambda(t) = \frac{\sin t}{2}$, et l'enveloppe est paramétrée par

$t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{\sin^2 t \cos t}{2} \\ \sin t + \frac{\sin t}{2} (2 \cos^2 t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \frac{\sin t}{2} (2 \cos^2 t + 1) \end{pmatrix}$ (cf. fig 3.4 et fig 3.4bis).

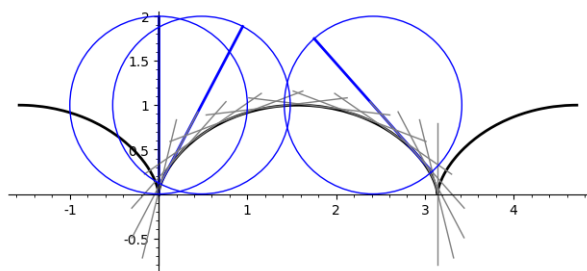


fig 4.3

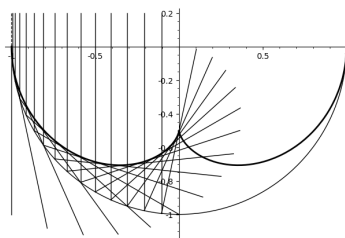


fig 4.4

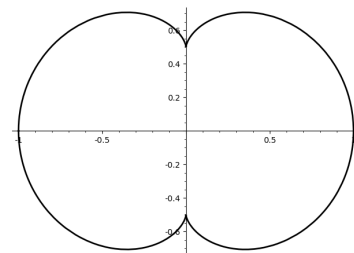


fig 4.4bis

Thème : rectification

* **4** On considère $p \in \mathbb{R}_+^*$, et la parabole $\mathcal{P}$ paramétrée par $x(t) = t, y(t) = \frac{t^2}{2p}$.

- Déterminer en tout point $M(t)$ de $\mathcal{P}$ la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$.
- On projette depuis le haut un faisceau lumineux vertical, qui se réfléchit sur la parabole assimilée à un miroir parfait. Soit $\vec{r}(t)$ le vecteur réfléchi en $M(t)$; montrer que $\vec{r} = 2(\vec{N} \cdot \vec{j}) - \vec{j}$ et en déduire une équation cartésienne de la droite portée par le rayon réfléchi.
- Montrer que tous les rayons réfléchis passent par le foyer de la parabole.

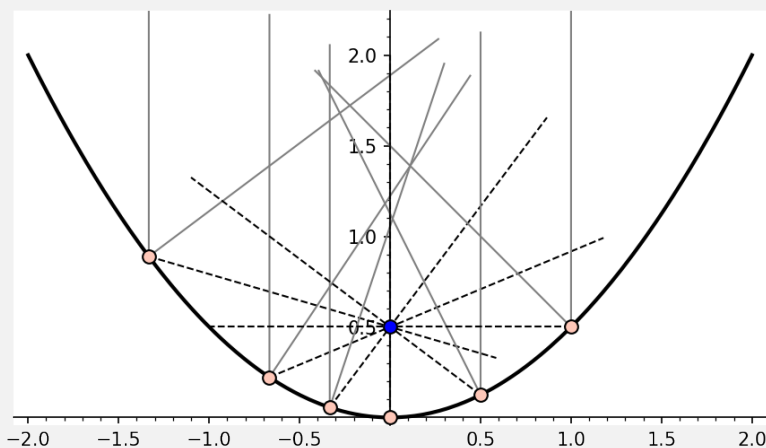
Réponse :

a) $\vec{M}'(t) = \left(\frac{1}{p} \right)$; $\|\vec{M}'\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} = \frac{\sqrt{t^2 + p^2}}{p}$, donc $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + p^2}} \begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + p^2}} \begin{pmatrix} -t \\ p \end{pmatrix}$.

b) le vecteur normal $\vec{N}$ dirige la bissectrice du rayon incident $\vec{j}$ et du rayon réfléchi $\vec{r}$, donc (les trois vecteurs étant normés) $\vec{j} + \vec{r} = 2(\vec{N} \cdot \vec{j})\vec{N}$, soit $\vec{r} = 2(\vec{N} \cdot \vec{j}) - \vec{j}$.

Alors $\vec{r} = \frac{1}{p^2 + t^2} \begin{pmatrix} -2pt \\ p^2 - t^2 \end{pmatrix}$. La droite portée par le rayon réfléchi, $(M; \vec{r})$, a pour équation $\det(\overrightarrow{MX}, \vec{r}) = 0$, soit $(p^2 - t^2)x + 2pt y = p^2 t$.

c) Cette équation est vérifiée par $x = 0, y = \frac{p}{2}$, qui est donc le point concourant de tous les rayons réfléchis.



* **5** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$; rectifier (ie en déterminer l'abscisse curviligne) les courbes définies par

$$\mathcal{C}_{5a} : \begin{cases} x(t) = a(t - \text{th}(t)) \\ y = \frac{a}{\text{ch}(t)} \end{cases} \quad \mathcal{C}_{5b} : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Indication pour $\mathcal{C}_{5b}$: déterminer un paramétrage en posant $x = a \cos^3(t)$.

Réponse : $\mathcal{C}_{5a}$: avec $x(t) = a(t - \operatorname{th}(t))$ et $y = \frac{a}{\operatorname{ch}(t)}$, on obtient $\vec{M}'(t) = a \left(\left(1 - \frac{\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) \vec{i} + \left(\frac{-\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) \vec{j} \right) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} (\operatorname{sh}^2(t) \vec{i} - \operatorname{sh}(t) \vec{j}) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} (\operatorname{sh}(t) \vec{i} - \vec{j})$
 et $\|\vec{M}'(t)\|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^4(t)} (1 + \operatorname{sh}^2(t)) = \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}$; alors $\frac{ds}{dt} = |\operatorname{th}(t)|$, donc pour $t > 0$: $s(t) = \int_0^t \operatorname{th}(u) du = \ln \operatorname{ch}(t)$.
 $\mathcal{C}_{5b}$: avec $x = a \cos^3(t)$, $y^{2/3} = a^{2/3} - a^{2/3} \cos^2 t = a^{2/3} \sin^2 t$; $y = a \sin^3(t)$ convient.
 Avec $(x, y) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $\vec{T} = (-3 \cos^2(t) \sin t, 3 \sin^2(t) \cos t) = 3 \cos t \sin t (-\cos(t), \sin(t))$.
 Alors $\|\vec{T}\|^2 = 9(\cos t \sin t)^2 (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = \frac{9}{4} \sin^2(2t)$, et $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} |\sin(2t)|$ entre les points singuliers de $\mathcal{C}_{6a}$, c'est-à-dire sur les intervalles $\left] k \frac{\pi}{2}, (k+1) \frac{\pi}{2} \right[$. $s(t) = \frac{3}{4} (1 - \cos(2t))$ sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

6 On considère les courbes définies par :

$$\mathcal{C}_{6a} : \begin{cases} x(t) = \cos(2t) + 2 \cos t \\ y(t) = \sin(2t) - 2 \sin t \end{cases} \quad \mathcal{C}_{6b} : 2e^{x+y} = (1 + e^x)(1 + e^y)$$

a) Déterminer la base de Frenet de ces deux courbes, et en déduire la courbure au point courant;

b) Déterminer un paramétrage de la développée de ces courbes.

Indication pour $\mathcal{C}_{6b}$: poser $t = e^x$, et exprimer y en fonction de t .

Réponse : $\mathcal{C}_{6a}$: $\vec{M}' = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) - 2 \sin t \\ 2 \cos(2t) - 2 \cos t \end{pmatrix}$, donc

$$\|\vec{M}'\|^2 = 4(\sin^2(2t) + 2 \sin(2t) \sin t + \sin^2 t + \cos^2(2t) - 2 \cos(2t) \cos t + \cos^2 t)$$

$$\|\vec{M}'\|^2 = 4(2 - 2(\cos(2t) \cos t + \sin(2t) \sin t)) = 8(1 - \cos(3t)) = 16 \sin^2 \frac{3t}{2}$$

Les points singuliers de $\mathcal{C}_{6a}$ sont donc ceux où $\sin \frac{3t}{2} = 0$, soit $\frac{t}{32} = k\pi$ ie $t = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sur l'intervalle $\left] k \frac{2\pi}{3}, (k+1) \frac{2\pi}{3} \right[$, $\frac{ds}{dt} = 4 \sin \frac{3t}{2}$. Or $-2 \sin(2t) - 2 \sin t = -4 \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}$ et

$$2 \cos(2t) - 2 \cos t = 4 \cos \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}, \text{ donc } \vec{T} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ -\sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \text{ puis } \vec{N} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ -\cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{4 \sin \frac{3t}{2}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ -\cos \frac{3t}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8 \sin \frac{3t}{2}} \vec{N}, \text{ soit } c = \frac{1}{8 \sin \frac{3t}{2}} \text{ par identification.}$$

$\vec{OI} = \vec{OM} + R\vec{N} = (-3 \cos(2t) + 6 \cos t) \vec{i} + (-3 \sin(2t) + 6 \sin t) \vec{j} = -3 \vec{OM}(t + \pi)$ donc la développée de $\mathcal{C}_{6a}$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}_{6a}$ par une homothétie de rapport -3 .

$$\mathcal{C}_{6b} : 2e^{x+y} = (1 + e^x)(1 + e^y).$$

En posant $t = e^x$, l'équation cartésienne devient $2te^y = (1 + t)(1 + e^y)$ soit $(t - 1)e^y = 1 + t$, donc $e^y = \frac{t+1}{t-1}$.

Les valeurs admissibles de t sont donc telles que $t > 0$ et $\frac{t+1}{t-1} > 0$, ie $t > 1$; alors $(x, y) = \left(\ln t, \ln \frac{t+1}{t-1} \right)$.

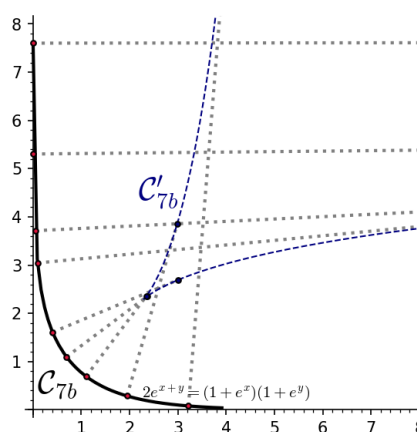
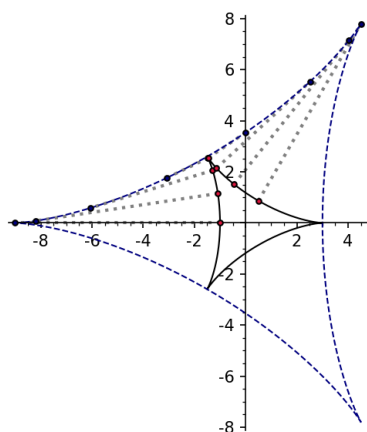
$$\vec{M}' = \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) \vec{i} = \left(\frac{-2}{t^2-1} \right) \vec{i}, \text{ donc } \|\vec{M}'\|^2 = \frac{1}{t^2} + \frac{4}{(t^2-1)^2} = \frac{t^4 - 2t^2 + 1 - 4t^2}{t^2(t^2-1)^2} = \frac{(t^2+1)^2}{t^2(t^2-1)^2}.$$

$$\text{Alors } \|\vec{M}'\| = \frac{1+t^2}{t(t^2-1)}, \text{ et } \vec{T} = \frac{2t(t^2-1)}{1+t^2} \vec{M}' \quad \vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ -\frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{t^2+1} \\ \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1+t^2}{t(t^2-1)} \begin{pmatrix} -\frac{4t}{1+t^2} \\ \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} \end{pmatrix} = \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \vec{N}, \text{ soit } c = \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \text{ par identification.}$$

On trouve ensuite $R\vec{N} = \frac{t^2+1}{t^2-1} \vec{i} + \frac{t^2+1}{2t} \vec{j}$, donc une paramétrisation de la développée de $\mathcal{C}_{6b}$ est

$$x_I(t) = \ln t + \frac{t^2+1}{t^2-1}, y_I(t) = \ln \frac{t+1}{t-1} + \frac{t^2+1}{2t}.$$



Thème : angle α , et courbes définies par une condition

7 Soit γ un arc paramétré birégulier. On pose $\alpha = \langle \vec{i}, \vec{T} \rangle$.

a) Calculer α pour la courbe $\mathcal{C}_{6a}$ de l'exercice 6), et retrouver l'expression de la courbure.

Même question pour la courbe $\mathcal{C}_{6b}$ (Indication : si $t = \tan \frac{\theta}{2}$, alors $(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$).

b) Déterminer les courbes planes définies par la condition (équation intrinsèque) $R = s$.

Réponse :

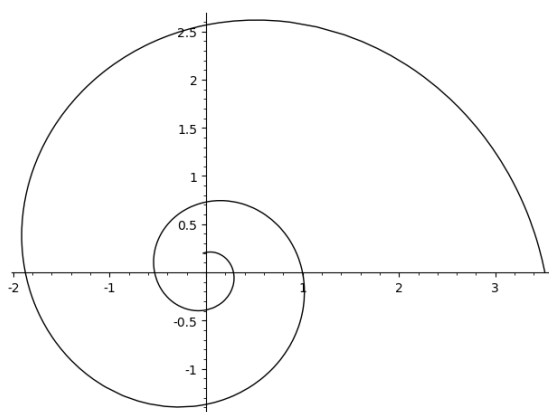
a) $\mathcal{C}_{6a}$: $\vec{T} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ -\sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{t}{2} + \pi \right) \\ \sin \left(\frac{t}{2} + \pi \right) \end{pmatrix}$, donc $\alpha = \frac{t}{2} + \pi$; alors $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{4 \sin \frac{3t}{2}}$;
on retrouve $c = \frac{1}{8 \sin \frac{3t}{2}}$.

$\mathcal{C}_{6b}$: $\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ \frac{-2t}{t^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \theta + \pi = \pi + 2 \arctan(t)$: $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, et
 $c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{t(t^2-1)}{1+t^2}$; on retrouve $\gamma = \frac{2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$.

b) $R = s$ équivaut à $s = \frac{ds}{d\alpha}$, équation différentielle en $s(\alpha)$ dont les solutions sont $s = Ce^\alpha$, $C \in \mathbb{R}$; alors
 $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{M}}{d\alpha} = Ce^\alpha \frac{d\vec{M}}{d\alpha}$, donc $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = Ce^\alpha \frac{d\vec{M}}{d\alpha}$ et $\frac{d\vec{M}}{d\alpha} = C_1 e^{-\alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$.

En posant $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, puis $z = x + iy$, on obtient $z'(\alpha) = C_1 e^{-\alpha} e^{i\alpha}$ puis $z(\alpha) = \frac{C_1}{-1+i} e^{-\alpha} e^{i\alpha} + C_2$.

Les courbes obtenues sont semblables (rotation puis homothétie) à la spirale logarithmique $(x, y) = (e^{-\alpha} \cos \alpha, e^{-\alpha} \sin \alpha)$.



** **8** Tractrice de chaînette

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On recherche une courbe T du quadrant $x > 0, y > 0$ décrite par un point M , qui vérifie les conditions :

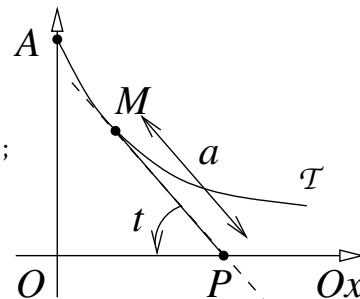
- (1) T passe par le point $A : (0, a)$
- (2) Soit P l'intersection de la tangente à T en M avec l'axe Ox , alors $\|MP\| = cte = a$.

On pose $t = \widehat{(\overrightarrow{PM}, -\vec{i})}$.

- a) Montrer que les coordonnées de M sont sous la forme $(\psi(t), a \sin t)$; déterminer qu'une condition sur ψ équivalente à (2) est $a \cos^2(t) + \sin t \psi'(t) = 0$.

- b) En déduire qu'une paramétrisation de T est $\left(x(t) = -a \left(\cos t + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}\right), y(t) = a \sin t\right)$.

- c) Rectifier T , et montrer que la développée de T admet pour équation cartésienne $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.



Réponse :

- a) Comme l'angle $\widehat{MPO}$ a pour mesure t , donc $\overrightarrow{PM} = a(-\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})$, donc $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + a(-\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) = \psi(t) \vec{i} + a \sin t \vec{j}$.

Une équation cartésienne de la tangente à T en $M(t)$ est alors $\begin{vmatrix} x - \psi(t) & y - a \sin t \\ x - \psi(t) & y - a \sin t \end{vmatrix} = 0$, soit $a \cos(t) x - \psi'(t) y = a \cos(t) \psi(t) - a \sin t \psi'(t)$.

L'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox (autrement dit le point P) vérifie $y = 0$ et $a \cos(t) x - \psi'(t) y = a \cos(t) \psi(t) - \psi'(t) y$, donc $x = \psi(t) - \tan t \psi'(t)$.

Or, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + a \cos t$, donc l'abscisse de P vaut $\psi(t) + a \cos t$, et $\psi(t) + a \cos t = \psi(t) - \tan t \psi'(t)$.

On trouve donc $\boxed{\psi'(t) = -a \frac{\cos^2 t}{\sin t}}$.

- b) Comme $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\psi(t) = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} (-\sin u) du$.

Après le changement de variable $v = \cos u$,

$$\psi(t) = -a \int_0^{\cos t} \frac{v^2}{1-v^2} dv = a \int_0^{\cos t} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1-v} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+v}\right) dv = -a \left[v - \frac{1}{2} \ln \frac{1-v}{1+v}\right]_0^{\cos t}.$$

Finalement $\boxed{\psi(t) = -a \left(\cos t + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}\right)}$. Comme $\psi'(t) = -a \frac{\cos^2 t}{\sin t}$,

$$\vec{M}' = \begin{pmatrix} -a \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ a \cos t \end{pmatrix} = \frac{a \cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \text{ donc } \frac{ds}{dt} = a \frac{\cos t}{\sin t} \text{ et } \vec{T} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi - t) \\ \sin(\pi - t) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $s(t) = a \ln(\sin t)$, que le repère de Frenet est $(\vec{T}, \vec{N}) = \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}\right)$; $\alpha = -t$.

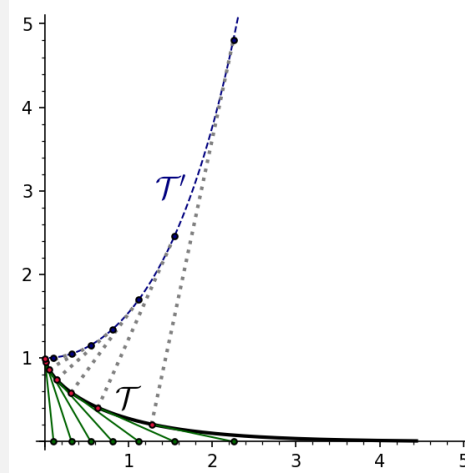
À l'aide de la formule $c = \frac{d\alpha}{ds}$, on trouve $c = \frac{-\sin t}{a \cos t}$ donc $R = \frac{-a \cos t}{\sin t}$.

$$\text{Alors } \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ a \sin t \end{pmatrix} - \frac{a \cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OI} = \left(-\frac{a}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}, a \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t}\right)$$

$$\text{donc } \boxed{I : \left(x_I = -\frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}, y_I = \frac{a}{\sin t}\right)};$$

$$\text{alors } \operatorname{ch}\left(\frac{x_I}{a}\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}} - \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}\right) = \frac{1}{2} \frac{(1 + \cos t) - (1 - \cos t)}{\sqrt{(1 + \cos t)(1 - \cos t)}} = \frac{1}{2} \frac{2 \cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = \frac{1}{\sin t} = \frac{y_I}{a}.$$



Thème : courbes, angle α et complexes – courbes semblables à leur développée

 * **9 Spirale logarithmique**

 Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$; on considère la courbe paramétrée $\mathcal{S}$ définie par
$$\begin{cases} x(t) = e^{-mt} \cos t \\ y(t) = e^{-mt} \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Exprimer $z(t + 2\pi)$ en fonction de $z(t)$ et en déduire que $M(t + 2\pi)$ et l'image de $M(t)$ par une similitude à préciser.
- Déterminer la tangente $\mathcal{T}_t$ à $\mathcal{S}$ en $M(t)$, et montrer que $\mathcal{T}_t$ fait un angle constant φ avec $(OM(t))$.
- Déterminer en $M(t)$: la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$, l'angle α , le rayon et le centre de courbure.
- Montrer que $\mathcal{S}$ est semblable à sa développée $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire que $\mathcal{S}'$ est l'image de $\mathcal{S}$ par une rotation/une homothétie.

Réponse :

$$\text{a) } z(t) = e^{-mt} \cos t + ie^{-mt} \sin t = e^{-mt} e^{it} = e^{(-m+i)t}. \quad z(t + 2\pi) = x(t + 2\pi) + iy(t + 2\pi) = e^{(-m+i)2\pi} e^{(-1+i)t} = e^{-2m\pi} z(t), \text{ donc } M(t + 2\pi) \text{ est l'image de } M(t) \text{ par l'homothétie de rapport } e^{-2m\pi}.$$

$$\text{b) } z \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } z'(t) = (-m + i)z(t). \text{ Or } -m + i = \sqrt{m^2 + 1} \left(\frac{-m}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{i}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) = \sqrt{m^2 + 1} e^{i\varphi} \text{ avec } \varphi = \arccos \frac{-m}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

 Donc $z'(t)$ est l'image de $z(t)$ par la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{m^2 + 1}$ et de la rotation d'angle φ : la tangente à $\mathcal{S}$ en $M(t)$ fait avec la droite $(OM(t))$ un angle constant égal à φ .

$$\text{c) } z'(t) = \sqrt{m^2 + 1} e^{-mt} e^{i\varphi} e^{it}, \text{ donc } \frac{ds}{dt} = |z'(t)| = \sqrt{m^2 + 1} e^{-mt}, \text{ et } \vec{T} \text{ a pour affixe } e^{i(t+\varphi)}.$$

 Alors $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos(t+\varphi) \\ \sin(t+\varphi) \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin(t+\varphi) \\ \cos(t+\varphi) \end{pmatrix}$. Par identification (relèvement) $\alpha = t + \varphi$, donc

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = \sqrt{m^2 + 1} e^{-mt}$$

 L'affixe de $R\vec{N}$ est $z_I - z\sqrt{m^2 + 1}e^{-mt}e^{it}ie^{i\varphi} = ie^{i\varphi}z(t)$; l'affixe du centre de courbure est

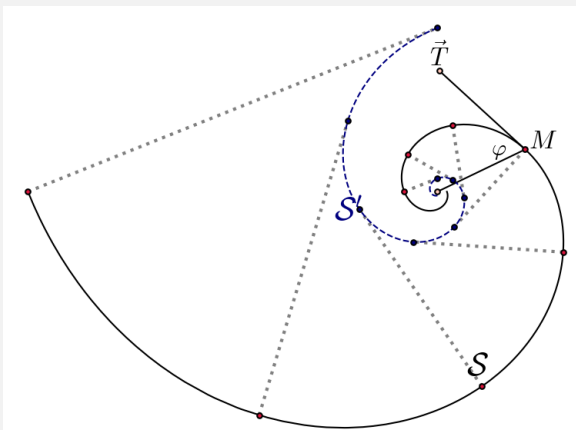
$$z_I(t) = z(t) + ie^{i\varphi}z(t) = (1 + ie^{i\varphi})z(t).$$

 d) Alors z_I est l'image de z par la similitude $z \mapsto (1 + ie^{i\varphi})z$.

$$1 + ie^{i\varphi} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \left(e^{-i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

 donc la similitude est la composée d'une homothétie de rapport $2 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et d'une rotation d'angle $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

 Comme une rotation a la même effet global sur $\mathcal{S}$ qu'une homothétie,

 $\mathcal{S}'$ est l'image de $\mathcal{S}$ par une homothétie.

 ** **10 Hypocycloïdes**

 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère la courbe paramétrée $\mathcal{H}_p$ définie par
$$\begin{cases} x(t) = \cos(pt) - p \cos t \\ y(t) = \sin(pt) + p \sin t \end{cases}.$$

- Montrer que la courbe $\mathcal{H}_p$ est fermée, et symétrique par rapport à l'axe Ox . Sur quel intervalle l'étudier?
- On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, z\left(t + \frac{2\pi}{p+1}\right) = e^{-\frac{2i\pi}{p+1}} z(t)$ et en déduire que $\mathcal{H}_p$ est invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{p+1}$. Sur quel intervalle minimal étudier $\mathcal{H}_p$?

- c) Montrer que $z'(t) = 2ip \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)e^{i\frac{p-1}{2}t}$, et en déduire quels sont les points singuliers de $\mathcal{H}_p$.
 Déterminer la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$ en un point régulier de $\mathcal{H}_p$. Quel est l'angle α ?
- d) Si $p \geq 1$, exprimer le rayon de courbure, puis le centre de courbure en un point régulier.
- e) Montrer que $\mathcal{H}_p$ est semblable à sa développée.
- f) Déterminer la tangente à $\mathcal{H}_p$ en $M\left(\frac{\pi}{p+1}\right)$.

Réponse :

a) Les fonctions x et y sont 2π -périodiques, donc la courbe $\mathcal{H}_p$ est fermée. Comme x est paire et y est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe O_x , et on l'étudie sur $[0, \pi]$.

b) $z(t) = \cos(pt) + i \sin(pt) - p \cos t + pi \sin t = e^{pit} - pe^{-it}$ donc $z\left(t + \frac{2\pi}{p+1}\right) = e^{pit} e^{\frac{2ip\pi}{p+1}} - pe^{-it} e^{\frac{-2i\pi}{p+1}} = e^{\frac{-2i\pi}{p+1}} (e^{pit} - pe^{-it}) = e^{\frac{-2i\pi}{p+1}} z(t)$.

Donc $M\left(t + \frac{2\pi}{p+1}\right)$ est l'image de $M(t)$ par rotation d'angle $\frac{-2\pi}{p+1}$. En tenant compte de la symétrie

de $\mathcal{H}_p$ par rapport à O_x , il y a bien invariance de $\mathcal{H}_p$ par rotation d'angle $\frac{2\pi}{p+1}$.

On peut donc étudier $\mathcal{H}_p$ sur $\left[0, \frac{\pi}{p+1}\right]$, en complétant ensuite la courbe par symétrie par rapport à O_x et rotations d'angles multiples de $\frac{2\pi}{p+1}$.

c) $z'(t) = ipe^{ipt} + ipe^{-it} = ip(e^{ipt} + e^{-it}) = ipe^{i\frac{p-1}{2}t}(e^{i\frac{p+1}{2}t} + e^{-i\frac{p+1}{2}t}) = 2ip \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)e^{i\frac{p-1}{2}t}$

Entre deux points singuliers, z est $\mathcal{C}^1$ et $z'(t) = pie^{pit} + pie^{-it} = ipe^{\frac{(p-1)it}{2}}(e^{\frac{(p+1)it}{2}} + e^{-\frac{(p+1)it}{2}}) = 2ip \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)e^{\frac{(p-1)it}{2}}$, qui s'annule si, et seulement si $\cos\left(\frac{p+1}{2}t\right) = 0$, soit $\frac{p+1}{2}t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Les points singuliers de $\mathcal{H}_p$ sont les $M(t_k)$ avec $t_k = \frac{2k+\pi}{p+1}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Prenons $t \in \left] \frac{-\pi}{p+1}, \frac{\pi}{p+1} \right[$, alors $\cos\left(\frac{p+1}{2}t\right) > 0$. Alors

$\frac{ds}{dt} = |z'(t)| = 2p \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)$, et $z'(t) = |z'(t)|e^{i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{(p-1)it}{2}} = \frac{ds}{dt}e^{i\alpha}$, donc $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{(p-1)t}{2}$, ce qui

donne $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{(p-1)t}{2} \\ \cos \frac{(p-1)t}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{(p-1)t}{2} \\ -\sin \frac{(p-1)t}{2} \end{pmatrix}$.

d) Utilisons la formule $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\alpha} : \frac{d\alpha}{dt} = \frac{p-1}{2}$ et $\frac{ds}{dt} = 2p \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)$, donc

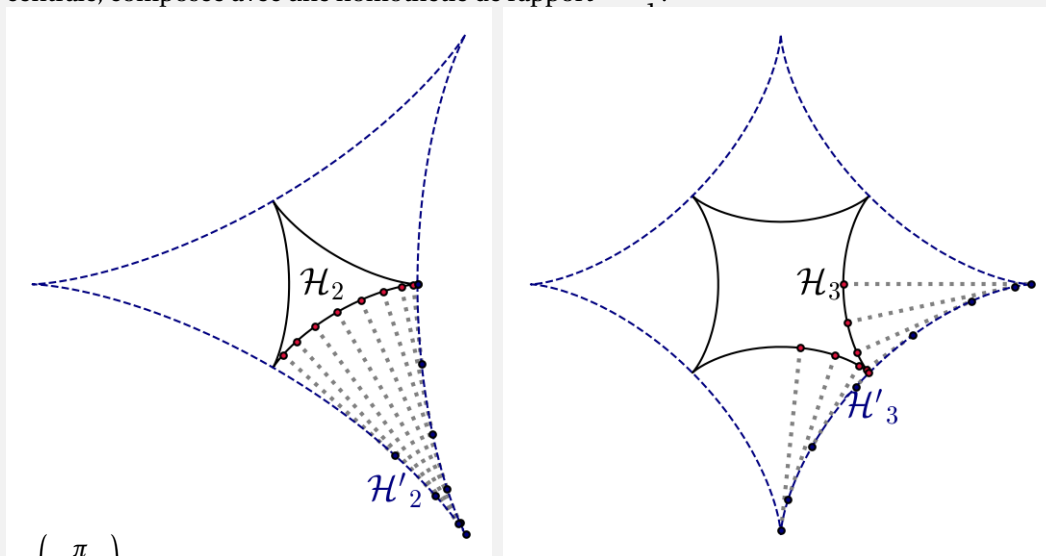
$$\boxed{R = \frac{4p}{p-1} \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)}.$$

Le centre de courbure est défini par l'afixe :

$$z_I = z + Rie^{i\alpha} = e^{ipt} - pe^{-it} - \frac{4p}{p-1} \cos\left(\frac{p+1}{2}t\right)e^{i\frac{p-1}{2}t} = e^{ipt} - pe^{-it} - \frac{4p}{p-1} (e^{i\frac{p+1}{2}t} + e^{-i\frac{p+1}{2}t})e^{i\frac{p-1}{2}t} = e^{ipt} - pe^{-it} - \frac{2p}{p-1} (e^{ipt} + e^{-it}) \text{ donc } \boxed{z_I = -\frac{p+1}{p-1} (e^{ipt} - pe^{-it})}.$$

Réponse :

- e) Le calcul précédent montre que la développée $\mathcal{H}'_p$ est obtenue à partir de $\mathcal{H}_p$ par une symétrie centrale, composée avec une homothétie de rapport $\frac{p+1}{1}$.



- f) $M\left(\frac{\pi}{p+1}\right)$ est un point singulier. Par dérivations successives :

$$M'\left(\frac{\pi}{p+1}\right) = \left(p \sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right) - p \sin\left(\frac{p\pi}{p+1}\right), p \cos\left(\frac{p\pi}{p+1}\right) + p \cos\left(\frac{\pi}{p+1}\right)\right) = (0, 0);$$

$$M''\left(\frac{\pi}{p+1}\right) = \left(-p^2 \cos\left(\frac{p\pi}{p+1}\right) + p \sin\left(\frac{p\pi}{p+1}\right), -p^2 \sin\left(\frac{p\pi}{p+1}\right) - p \sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right)\right) \text{ donc}$$

$$M''\left(\frac{\pi}{p+1}\right) = (p^2 + p) \left(\cos\left(\frac{\pi}{p+1}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right)\right) = -(p^2 + p) M\left(\frac{\pi}{p+1}\right)$$

La tangente à $M\left(\frac{\pi}{p+1}\right)$ passe par l'origine.

Pour des raisons de symétrie, ce point est un point de rebroussement de première espèce.

