PT **Exercices sur les espaces euclidiens** **2024/2025**

feuille N° 4

☞ **1** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.
Montrer que $\forall (x,y)\in E^2, \quad \|x+y\|\,\|x-y\|\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2$. Étudier le cas d'égalité.

---

* **2** Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k=1$. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}\geqslant n^2$ et étudier le cas d'égalité.
Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

* **3** Soit E un espace euclidien, (a,b) un système libre de E, et $u\in\mathscr{L}(E)$ définie par $u(x)=\langle x|a\rangle\, a+\langle x|b\rangle\, b$.

a) Montrer que $\forall (x,y)\in E^2, \big\langle u(x)|y\big\rangle=\big\langle x|u(y)\big\rangle$.
b) En déduire que $\operatorname{Ker}(u)\perp \operatorname{Im}(u)$, et en déduire que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Montrer que $\operatorname{Ker}(u)=\operatorname{Vect}(a,b)^{\perp}$ et que $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Vect}(a,b)$.
c) Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$ dans la base (a,b), et montrer que u est diagonalisable.

---

* **4** On considère la matrice $M=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base orthogonale de $\operatorname{Im}(M)$ et de $\operatorname{Ker}(M)$. Montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.
b) Justifier que M est diagonalisable, et diagonaliser M. Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associé à M.
c) Montrer que $A=I_4+M$ est inversible, et que A^{-m} tend quand m tend vers $+\infty$ vers la matrice d'un endomorphisme à préciser.
d) Déterminer la symétrie S par rapport à $\operatorname{Im}(M)$.

---

* **5** Dans un espace euclidien E muni d'une base orthonormée, soit p un projecteur de matrice P.
Justifier que $\operatorname{rg}(P)=\operatorname{Tr}(P)$.
Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, P est symétrique.
Montrer que $A=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}13&-2&-3\\-2&10&-6\\-3&-6&5\end{pmatrix}$ est une matrice de projection orthogonale, et préciser ses éléments.

☞ **6** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$ et $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit orthogonale.
b) Cette condition étant remplie, déterminer la nature de l'isométrie définie par $M(a,b)$.

---

* **7** **Polynômes de Tchebychev**

a) À l'aide de l'égalité $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x=2\cos x\cos(nx)$, montrer par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$ l'existence d'un polynôme T_n tel que $\forall x\in\mathbb{R}, T_n(\cos x)=\cos(nx)$, ainsi que la relation $T_{n+1}=2X\,T_n-T_{n-1}$.
b) Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg T_n=n$.
c) Montrer que $\big\langle P|Q\big\rangle=\displaystyle\int_0^{\pi}P(\cos x)Q(\cos x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
d) Montrer que, pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $0\leqslant n<m$: $\big\langle T_n|T_m\big\rangle=0$.
e) Déterminer la valeur minimale de $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\cos^2 t-a\cos t-b\right)^2\mathrm{d}t$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

∗ **8** Soit $R \in \mathrm{SO}(3)$ canoniquement associée à la rotation r, d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{K}$; alors $\mathscr{B}' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée directe. On considère la matrice $\Delta = \frac{1}{2}\left(R - R^{\mathsf{T}}\right)$.

a) Montrer que $\Delta^{\mathsf{T}} = -\Delta$, et en déduire qu'il existe $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$.

On pose alors $\vec{\omega} = p\vec{\imath} + q\vec{\jmath} + r\vec{k}$.

b) Montrer que Δ est associé canoniquement à l'endomorphisme $\delta = \frac{1}{2}(r - r^{-1})$, et que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \delta(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$.

c) En écrivant la matrice Δ' de δ dans B', en déduire que $\delta(\vec{I}) = \vec{\omega} \wedge \vec{I} = \sin\theta \vec{J}$, puis que $\vec{\omega} = \sin\theta . \vec{K}$.

d) Quelle est la nature de l'endomorphisme défini par $R = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 4 & -36 & 33 \\ 48 & 9 & 4 \\ -9 & 32 & 36 \end{pmatrix}$?

☞ **9** On considère les matrices suivantes :

$$A_9 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_9 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad S_9 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que ces matrices sont orthogonales et déterminer la nature des isométries canoniquement associées, respectivement appelées α_9, β_9, γ_9 et σ_9 .

b) Montrer que σ_9 conserve les axes des rotations α_9 et β_9.

c) Trouver des matrices R_9 et T_9 telles que $A_9 = R_9 \times S_9$ et $C_9 = S_9 \times T_9$, et décrire les endomorphismes ρ_9 et τ_9 canoniquement associés.

d) Décrire les isométries définies par $A_9 \times C_9$ et $A_9 \times B_9$.

10 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{(0, 0, 0, 0)\}$, et $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres, et les sous-espaces correspondants.

Indication : quel est le rang de M ?

∗ **11** Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans une base orthonormale indépendante de a, b et c.

Indication : calculer $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; déterminer le noyau de $M - (a + b\sqrt{2} + c)I_3$.

Thème : coniques

☞ **12** En fonction de l'excentricité $e \in]0, 1[$, déterminer une équation cartésienne de la conique de foyers A' : $(-1, 0)$ et $A : (1, 0)$.

☞ **13** Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la nature, l'excentricité et les foyers de la conique d'équation cartésienne $x^2 + 2mxy + y^2 = 1$.

∗ **14** Déterminer la nature et un paramétrage de la conique d'équation cartésienne $x^2 + xy + y^2 - x + y = 0$ puis son excentricité, la position des foyers et d'une directrice.

∗ **15** Déterminer la nature et un paramétrage de la conique d'équation cartésienne $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 12y = 16$ puis son excentricité, la position des foyers et d'une directrice.