

PT

Exercices sur les espaces euclidiens (solutions)

2024/2025

feuille N° 4

1 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. Étudier le cas d'égalité.

Réponse :

a) $\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle$ (Formule d'Al-Kashi), et

$\|x - y\|^2 = \langle x - y | x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$ donc par multiplication :

$$\|x + y\|^2 \cdot \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle)(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle) = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 - (2\langle x | y \rangle)^2$$

$$\|x + y\|^2 \cdot \|x - y\|^2 \leq (\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 \text{ avec égalité si, et seulement si, } \langle x | y \rangle = 0 \text{ c'est-à-dire } x \perp y.$$

L'inégalité demandée s'en déduit par passage à la racine carrée.

* 2 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Réponse : Considérons que $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel, et posons $X = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})^T$ et $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^T$.

$$\text{Alors } \langle X | Y \rangle = X^T \cdot Y = \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \frac{1}{\sqrt{x_k}} = n, \quad \|X\|^2 = \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}^2 = \sum_{k=1}^n x_k = 1, \text{ et } \|Y\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\langle X | Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$ s'écrit alors $n^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$.

Il y a égalité lorsque X et Y sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda \sqrt{x_k} = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$; ceci amène que $\lambda x_k = 1$ pour tout k , donc que $\sum_{k=1}^n \lambda x_k = n$; comme $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, on en déduit que $\lambda = n$ donc

$$x_k = \frac{1}{n}.$$

* 3 Soit E un espace euclidien, (a, b) un système libre de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(x) = \langle x | a \rangle a + \langle x | b \rangle b$.

a) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$.

b) En déduire que $\text{Ker}(u) \perp \text{Im}(u)$, et en déduire que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(a, b)^\perp$ et que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(a, b)$.

c) Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$ dans la base (a, b) , et montrer que u est diagonalisable.

Réponse :

a) Soit $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|a \rangle \langle a|y \rangle + \langle x|b \rangle \langle b|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$.

b) Soit $(k, y) \in \text{Ker}(u) \times \text{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$, $y = u(x)$ donc $\langle k|y \rangle = \langle k|u(x) \rangle = \langle u(k)|x \rangle = \langle 0_E|x \rangle = 0$, donc $\boxed{\text{Ker}(u) \perp \text{Im}(u)}$.

D'après la formule du rang, $\dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Im}(u) = \dim E$; mais $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$, donc $\dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)) = \dim E$ donc $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

$\boxed{\text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \text{ sont supplémentaires orthogonaux.}}$

Comme (a, b) est libre, $x \in \text{Ker}(u) \iff \langle a|x \rangle = \langle b|x \rangle = 0 \iff x \in \text{Vect}(a, b)^\perp$: $\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Vect}(a, b)^\perp}$.

Il est clair que $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(a, b)$. On obtient l'inclusion inverse par la formule du rang (qui garantit que $\text{rg}(u) = 2$, ou bien par les égalités $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \text{Vect}(a, b)^\perp \oplus \text{Vect}(a, b) = E$.

$\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(a, b)}$.

c) On obtient d'après l'énoncé : $u(a) = \|a\|^2 a + \langle a|b \rangle b$ et $u(b) = \langle a|b \rangle a + \|b\|^2 b$, donc la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$ dans la base (a, b) est $G = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & \langle a|b \rangle \\ \langle a|b \rangle & \|b\|^2 \end{pmatrix}$.

$\chi_G = X^2 - (\|a\|^2 + \|b\|^2)X + (\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (\langle a|b \rangle)^2) = X^2 - sX + p$ avec $s = \text{Tr}(G) = \|a\|^2 + \|b\|^2$ et $p = \det(G) = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - (\langle a|b \rangle)^2$.

Le discriminant de χ_G est $s^2 - 4p = \|a\|^4 + \|b\|^4 + 2\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - 4\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 + 4(\langle a|b \rangle)^2 = \|a\|^4 + \|b\|^4 - 2\|a\|^2 \cdot \|b\|^2 + 4(\langle a|b \rangle)^2 = (\|a\|^2 - \|b\|^2)^2 + 4(\langle a|b \rangle)^2 \geq 0$.

Ce discriminant est nul si, et seulement si, $\|a\| = \|b\|$ et $\langle a|b \rangle = 0$ et alors la matrice G est multiple de l'identité, donc diagonalisable, et admettant une valeur propre double : $\lambda = \|a\| = \|b\|$.

Si, au contraire, le discriminant est non nul, alors il est strictement positif et G admet deux valeurs propres réelles distinctes λ et μ (et positives, puisque $\lambda + \mu = s \geq 0$ et $\lambda \mu = p \geq 0$ d'après Cauchy-Schwarz).

Dans les deux cas, $\dim E_0 + \dim E_\lambda + \dim E_\mu = n - 2 + 1 + 1 = n$, donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

* **4** On considère la matrice $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base orthogonale de $\text{Im}(M)$ et de $\text{Ker}(M)$. Montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.

b) Justifier que M est diagonalisable, et diagonaliser M . Reconnaître l'endomorphisme canoniquement associé à M .

c) Montrer que $A = I_4 + M$ est inversible, et que A^{-m} tend quand m tend vers $+\infty$ vers la matrice d'un endomorphisme à préciser.

d) Déterminer la symétrie S par rapport à $\text{Im}(M)$.

Réponse :

- a) $\text{Ker}(M)$ est défini par le système (purgé des équations redondantes) : $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$. Il est de dimension $4 - 2 = 2$.

On trouve facilement $\text{Ker}(M) = \text{Vect}(U, W)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $U \perp W$.

Les deux premières colonnes de $\text{Im}(M)$ (qui est de dimension 2) fournissent une base de $\text{Im}(M)$: V, T avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui plus est orthogonale ($V \perp T$).

Comme $V \perp U, V \perp W$ et que $T \perp U, T \perp W$, le système U, V, W, T est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$, adaptée à la somme directe $\text{Ker}(M) \oplus \text{Im}(M)$, donc $\text{Im}(M)$ et $\text{Ker}(M)$ sont orthogonaux.

- b) Un calcul matriciel montre que $M.V = V$ et que $M.T = T$, donc (U, V, W, T) est une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de M . M est diagonalisable, de spectre $\{0, 1\}$, donc M est une matrice de projection orthogonale, puisque $\text{Ker}(M) \perp \text{Im}(M)$.

L'endomorphisme canoniquement associé à M est la projection orthogonale sur $\text{Im}(M)$.

- c) D'après la question précédente, il existe une matrice orthogonale P telle que $M = P \cdot \text{diag}(1, 1, 0, 0) \cdot P^T$; et alors $A = P \cdot \text{diag}(1, 1, 2, 2) \cdot P^T$ puis $A^{-1} = P \cdot \text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot P^T$ et enfin $A^{-m} = P \cdot \text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}\right) \cdot P^T$ pour $m \in \mathbb{N}$.

Comme $\text{diag}\left(1, 1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}\right)$ tend vers $\text{diag}(1, 1, 0, 0)$ quand m tend vers $+\infty$, A^{-m} tend vers $I_4 - M$.

- d) $2M = S + I_4$ donc $S = I_4 - 2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- * **5** Dans un espace euclidien E muni d'une base orthonormée, soit p un projecteur de matrice P . Justifier que $\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)$.

Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, P est symétrique.

Montrer que $A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de projection orthogonale, et préciser ses éléments.

Réponse : Si P est une matrice de projecteur, P est diagonalisable, de spectre $\{0, 1\}$, donc $P \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-p} \end{pmatrix}$

donc $\text{rg}(P) = r = \text{Tr}(P)$. Si la matrice P est symétrique, alors $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}))^2, P.X^T.Y = X^T.P.Y$ donc $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$. Alors, soit $(x, u) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)$, $\exists y \in E, u = p(y)$ donc $\langle x|u \rangle = \langle x|p(y) \rangle = \langle p(x)|y \rangle = 0$.

On en tire que $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ c'est-à-dire que p est une projection orthogonale.

Réciproquement, si p est une projection orthogonale, alors $S = 2P - I_3$ est une symétrie orthogonale et

$$P^T = \left(\frac{S + I_3}{2}\right)^T = \frac{S + I_3}{2} = P, \text{ donc } P \text{ est symétrique.}$$

On vérifie que $A = A^T$, et que $A^2 = A$. A est donc une matrice de projection orthogonale.

Comme $\text{Tr}(A) = 2$, A est de rang 2, donc le support de la projection $E_1(P)$ est un plan : comme

$$P - I_3 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}, \text{ ce plan est d'équation } x + 2y + 3z = 0.$$

A est la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

- 6** Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ et $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

- a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $M(a, b)$ soit orthogonale.

b) Cette condition étant remplie, déterminer la nature de l'isométrie définie par $M(a, b)$.

Réponse :

a) Appelons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $M(a, b)$. Alors $\langle C_1 | C_2 \rangle = \langle C_1 | C_3 \rangle = \langle C_2 | C_3 \rangle = b^2 + 2ab$, et $\langle C_1 | C_1 \rangle = \langle C_2 | C_2 \rangle = \langle C_3 | C_3 \rangle = a^2 + 2b^2$, donc la matrice $M(a, b)$ est orthogonale si, et seulement

$$\text{si, } \begin{cases} (1) & b(b+2a) = 0 \\ (2) & a^2 + 2b^2 = 1 \end{cases}.$$

b) L'équation (1) est vérifiée si, et seulement si, $b = 0$ ou $b = -2a$. $b > 0$ par hypothèse, donc $b = 0$ est exclu.

Ainsi $b = -2a$, alors (2) s'écrit $a^2 + 8a^2 = 1$, soit $a = \frac{\varepsilon}{3}$ où $\varepsilon \in \{-1; 1\}$, donc $b = -\frac{2\varepsilon}{3}$; mais $b > 0$ par

hypothèse, donc $b = \frac{2}{3}$ et $a = -\frac{1}{3}$, donc $M(a, b) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Remarquons que $M.M^T = I_3$ et $M = M^T$, donc $M^2 = I_3$; M est une matrice de symétrie. C'est la matrice de la symétrie axiale par rapport au vecteur $(1, 1, 1)$.

* 7 Polynômes de Tchebychev

a) À l'aide de l'égalité $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos(nx)$, montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$, ainsi que la relation $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$.

b) Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n$.

c) Montrer que $\langle P | Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos x) Q(\cos x) dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

d) Montrer que, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq n < m$: $\langle T_n | T_m \rangle = 0$.

e) Déterminer la valeur minimale de $\int_0^\pi (\cos^2 t - a \cos t - b)^2 dt$ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

Réponse :

a) $\cos(0x) = 1$ et $\cos(1x) = \cos x$ donc $T_0 = 1, T_1 = X$ conviennent (initialisation de la récurrence double).

Supposons que T_{n-1} et T_n soient vraies, alors pour tout réel x : $2\cos x T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x) = 2\cos x \cos(nx) - \cos((n-1)x) = \cos((n+1)x)$, donc en posant $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$, on obtient $T_{n+1}(\cos x) = \cos((n+1)x)$ pour tout réel x , d'où l'existence de T_{n+1} . On conclut par récurrence double.

Remarque : unicité; s'il existait deux polynômes T_n et U_n tels que $U_n(\cos x) = \cos(nx) = T_n(\cos x)$, alors $T_n - U_n$ s'annulerait pour toutes les valeurs de $\cos x$, donc $T_n = U_n$.

b) On obtient successivement $T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.

Une récurrence double montre que $\deg T_n = n$ et que T_n a la parité de n : c'est vrai pour les premières valeurs de n ; supposons que $\deg T_{n-1} = n-1$, $\deg T_n = n$, $T_{n-1}(-X) = (-1)^{n-1} T_{n-1}(X)$ et $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$; alors $\deg T_{n+1} = \deg(2X T_n - T_{n-1}) = n+1$ et $T_{n+1}(-X) = -2X T_n(-X) - T_{n-1}(-X) = (-1)^{n+1} (2X T_n - T_{n-1})(X) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$.

c) * $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique et bilinéaire (facile à vérifier).

* Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P | P \rangle = \int_0^\pi P(\cos x)^2 dx \geq 0$; de plus, comme $x \mapsto P(\cos x)^2$ est continue et positive, $\langle P | P \rangle = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, P(\cos x) = 0 \implies P = 0$.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

d) Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq n < m$: $\langle T_n | T_m \rangle = \int_0^\pi T_n(\cos t) T_m(\cos t) dt = \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)t) \cos((n+m)t) dt = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} \right]_0^\pi - \left[\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} \right]_0^\pi \right) = 0$.

Donc $T_n \perp T_m$, et la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

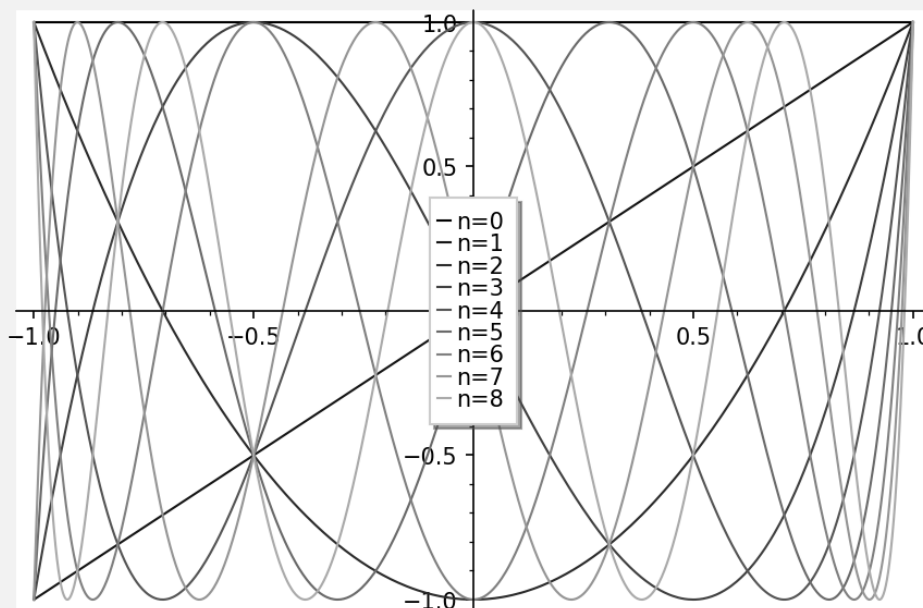
Réponse : e)

$\int_0^\pi (\cos^2 t - a \cos t - b)^2 dt = \|X^2 - aX - b\|^2$ est minimal lorsque

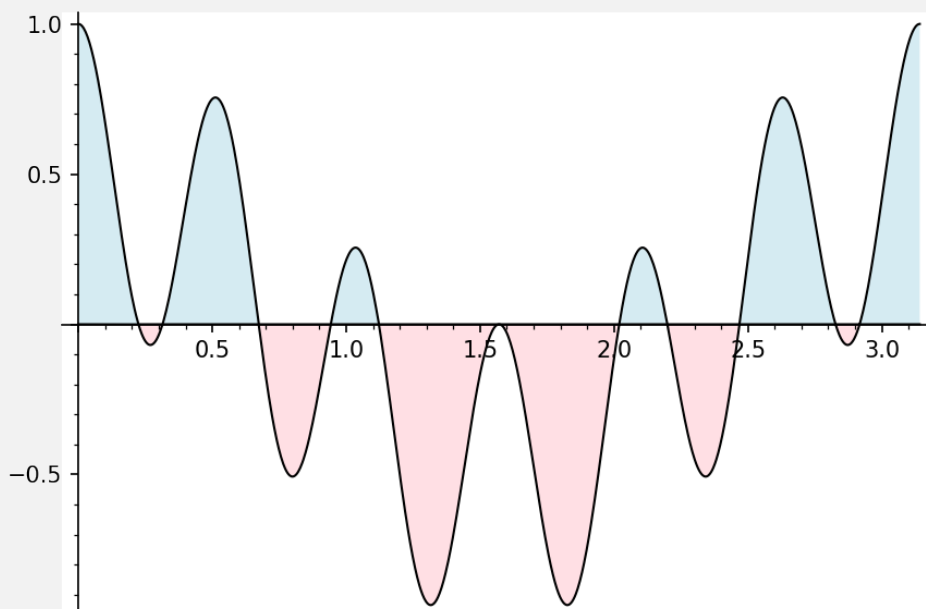
$$aX + b = \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \frac{\langle X^2 | T_0 \rangle}{\langle T_0 | T_0 \rangle} T_0 + \frac{\langle X^2 | T_1 \rangle}{\langle T_1 | T_1 \rangle} T_1.$$

$X^2 = \frac{1}{2}(2X^2 - 1 + 1) = \frac{1}{2}(T_2 + T_0)$, $\langle X^2 | T_1 \rangle = 0$ et $\langle X^2 | T_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle T_0 | T_0 \rangle = \pi$, donc $Q = \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \frac{1}{2}T_0$, autrement dit l'intégrale est minimale pour $(a, b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Sa valeur est $\|X^2 - Q\|^2 = \|X^2\|^2 - \frac{1}{4} \|T_0\|^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \frac{\pi}{2}$; la valeur minimale est $\frac{\pi}{8}$.



les 9 premiers polynômes de Tchebychev



$x \mapsto \cos(5x) \cos(7x)$ a une valeur moyenne nulle : $\langle T_5 | T_7 \rangle = 0$

- * **8** Soit $R \in \text{SO}(3)$ canoniquement associée à la rotation r , d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{K}$; alors $\mathcal{B}' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormée directe. On considère la matrice $\Delta = \frac{1}{2}(R - R^T)$.

a) Montrer que $\Delta^T = -\Delta$, et en déduire qu'il existe $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$.

On pose alors $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$.

b) Montrer que Δ est associé canoniquement à l'endomorphisme $\delta = \frac{1}{2}(r - r^{-1})$, et que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \delta(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$.

c) En écrivant la matrice Δ' de δ dans B' , en déduire que $\delta(\vec{i}) = \vec{\omega} \wedge \vec{i} = \sin\theta\vec{j}$, puis que $\vec{\omega} = \sin\theta\vec{K}$.

d) Quelle est la nature de l'endomorphisme défini par $R = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 4 & -36 & 33 \\ 48 & 9 & 4 \\ -9 & 32 & 36 \end{pmatrix}$?

Réponse :

a) Avec $\Delta = \frac{1}{2}(R - R^T)$, $\Delta^T = \frac{1}{2}(R^T - R) = -\Delta$.

En posant $(p, q, r) = (\delta_{3,2}, -\delta_{3,1}, \delta_{2,1})$, on trouve alors $(\delta_{2,3}, \delta_{1,3}, \delta_{1,2}) = (-p, q, -r)$ et par ailleurs

$$(\delta_{1,1}, \delta_{2,2}, \delta_{3,3}) = (0, 0, 0), \text{ donc } \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comme R est orthogonale, $R^T = R^{-1}$ donc R^T est associé canoniquement à r^{-1} ; donc, par linéarité, Δ est associé canoniquement à l'endomorphisme $\delta = \frac{1}{2}(r - r^{-1})$.

Un calcul matriciel montre que $\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \delta(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$

c) Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de R est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc celle de δ est $\Delta' = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $\delta(\vec{i}) = \vec{\omega} \wedge \vec{i} = \sin\theta\vec{j}$, $\delta(\vec{j}) = \vec{\omega} \wedge \vec{j} = -\sin\theta\vec{i}$ et $\delta(\vec{k}) = \vec{0}$.

ω a pour composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, donc $\vec{\omega} = \sin\theta\vec{K}$.

d) En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de R_1 , on obtient $\langle C_1 | C_2 \rangle = 0$, $\langle C_1 | C_1 \rangle = \langle C_2 | C_2 \rangle = 1$, et $C_3 = C_1 \wedge C_2$, donc $R_1 \in \text{SO}(3)$.

Alors $\Delta_1 = \frac{R_1 - R_1^T}{2} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\omega_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \sin\theta\vec{K}$; comme ω_1 est normé, $\sin\theta = 1$

donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. R_1 est la [matrice de la] rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé directement par $(2, 3, 6)$.



9 On considère les matrices suivantes :

$$A_9 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_9 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad S_9 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que ces matrices sont orthogonales et déterminer la nature des isométries canoniquement associées, respectivement appelées $\alpha_9, \beta_9, \gamma_9$ et σ_9 .

b) Montrer que σ_9 conserve les axes des rotations α_9 et β_9 .

c) Trouver des matrices R_9 et T_9 telles que $A_9 = R_9 \times S_9$ et $C_9 = S_9 \times T_9$, et décrire les endomorphismes ρ_9 et τ_9 canoniquement associés.

d) Décrire les isométries définies par $A_9 \times C_9$ et $A_9 \times B_9$.

Réponse :

a) Soit C_1, C_2, C_3 les colonnes de A_9 , alors $C_1 \cdot C_2 = \frac{1}{9}(4+1+4) = 1$, et $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3$, donc A_9 est orthogonale et $\det(A_9) = 1$: A_9 est une matrice de rotation. De même B_9 et C_9 sont des matrices de rotation. $\alpha_9, \beta_9, \gamma_9$ sont des rotations.

S_9 est orthogonale et symétrique, donc est une matrice de symétrie orthogonale; comme $\text{Tr}(S_9) = \frac{-1+2+2}{3} = 1$, donc $\det(S_{ns}) = -1$, et σ_9 est une réflexion.

b) $B_9 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc l'axe de β_9 est dirigé par $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A_9 \cdot \Omega = \Omega$, et que

$S_9 \cdot \Omega = \Omega$, donc σ_9 conserve les axes des rotations α_9 et β_9 .

Puisque $\text{Tr}(A_9) = \frac{2+2+2}{3} = 2 = 1 + 2 \cos a$ avec $\cos a = \frac{1}{2}$, l'angle a de A_9 vérifie $\cos a = \frac{1}{2}$. Le signe

de son sinus est celui du déterminant $\det(\vec{i}, C_1, \Omega) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, donc $a = \frac{\pi}{3}$.

α_9 est la rotation d'axe dirigé par $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

c) De même,

β_9 est la rotation d'axe dirigé par Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et γ_9 est la rotation d'axe dirigé par $\Omega' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

d'angle $\arccos \frac{1}{3}$. Enfin, comme $S_9 - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

σ est la réflexion par rapport au plan d'équation $2x - y - z = 0$.

d) $A_9 = R_9 \times S_9$ équivaut à $R_9 = A_9 \times S_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à une réflexion par rapport au plan d'équation $x = z$.

$C_9 = S_9 \times T_9$ équivaut à $T_9 = S_9 \times C_9 = \text{diag}(-1, 1, 1)$, ce qui correspond à une réflexion par rapport au plan d'équation $x = 0$.

e) $A_9 \times B_9$ est la rotation d'axe dirigé par $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle π , donc un demi-tour. $A_9 \times C_9 =$

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une symétrie orthogonale et une rotation, donc un demi-tour d'axe $\vec{j}$.

10 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$, et $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres, et les sous-espaces correspondants.



Indication : quel est le rang de M ?

Réponse : Posons $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, alors les colonnes de A sont $C_1 = aC, C_2 = bC, C_3 = cC$ et $C_4 = dC$, c'est-à-dire que $M = C^T \cdot C$.

M est de rang 1, donc 0 est valeur propre de M : $\dim E_0(M) = 3$.

Nécessairement $X^3 | \chi_M$, donc χ_M est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\chi_M = X^3(X - \lambda)$, avec $\lambda = \text{Tr}(M) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

Comme $\lambda \neq 0$, $\dim E_\lambda(M) \geq 1$ et $\dim E_0(M) + \dim E_\lambda(M) \geq 1 + 3 = 4$; M est alors diagonalisable, de valeurs propres 0 (triple) et $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (simple).

On peut également remarquer que M est symétrique réelle, donc diagonalisable, et que $E_\lambda(M) = (E_0(M))^\perp$.

$E_0(M)$ est l'hyperplan d'équation cartésienne $ax + by + cz + dt = 0$; $E_\lambda(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

- * **11** Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans une base orthonormale indépendante de a, b et c .

Réponse : M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale en vertu du théorème spectral.

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M.U = \begin{pmatrix} a-c \\ 0 \\ c-a \end{pmatrix} = (a-c)U$, donc U est vecteur propre de M attaché à la valeur propre $a-c$.

$M - (a + b\sqrt{2} + c)I_3 = \begin{pmatrix} b\sqrt{2}-c & b & c \\ b & b\sqrt{2} & b \\ c & b & c\sqrt{2}-b \end{pmatrix}$ vérifie $C_1 + C_3 = \sqrt{2}C_2$, donc $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur

propre de M associé à la valeur propre $a + b\sqrt{2} + c$. Comme $\text{Tr}(M) = 3a + c$, la troisième valeur propre est $a - b\sqrt{2} + c$; elle est associée à $W = U \wedge V$, donc à $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement $M = P.\Delta.P^T$ avec $\Delta = \text{diag}(a-c, a + b\sqrt{2} + c, a - b\sqrt{2} + c)$ et $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▲ Ne pas oublier de normer les vecteurs U, V, W !

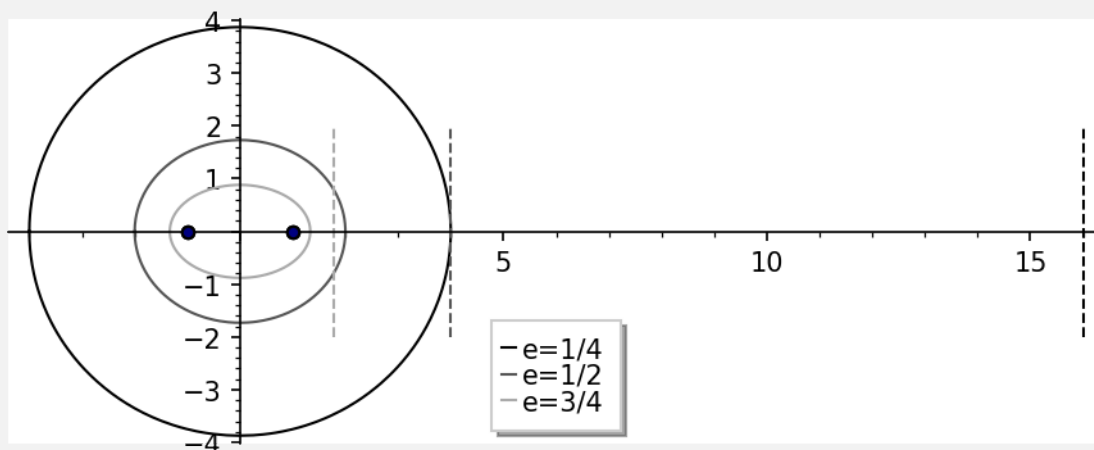
Thème : coniques

- 👁 **12** En fonction de l'excentricité $e \in]0, 1[$, déterminer une équation cartésienne de la conique de foyers $A' : (-1, 0)$ et $A : (1, 0)$.

Réponse : Puisque $e \in]0, 1[$, la conique est une ellipse. Étant donné les coordonnées des foyers, $c = 1$ et puisque $e = \frac{c}{a}$ donc $a = \frac{1}{e}$.

Comme, pour une ellipse, $c^2 + b^2 = a^2$, on obtient $e^2 a^2 + b^2 = a^2$ soit $b^2 = \frac{1-e^2}{e^2}$, donc $b = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$.

Finalement, l'équation cartésienne est $e^2 x^2 + \frac{e^2 y^2}{1-e^2} = 1$.



- 👁 **13** Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la nature, l'excentricité et les foyers de la conique d'équation cartésienne $x^2 + 2mxy + y^2 = 1$.

Réponse : La matrice symétrique associée à $x^2 + 2mxy + y^2$ est $S = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

$\chi_S = \begin{vmatrix} X-1 & -m \\ -m & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - m^2 = (X-m-1)(X+m-1)$, donc les valeurs propres de S sont $m+1$ et $1-m$.

Une diagonalisation donne $S = P^T \cdot \text{diag}(m+1, m-1) \cdot P$, avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation de la conique devient $(1-m)x_1^2 + (m+1)y_1^2 = 1$.

► si $m = 1$, alors $x^2 + 2mxy + y^2 = (x+y)^2$, donc l'équation équivaut à $x+y = \pm 1$, ce qui correspond à deux droites parallèles;

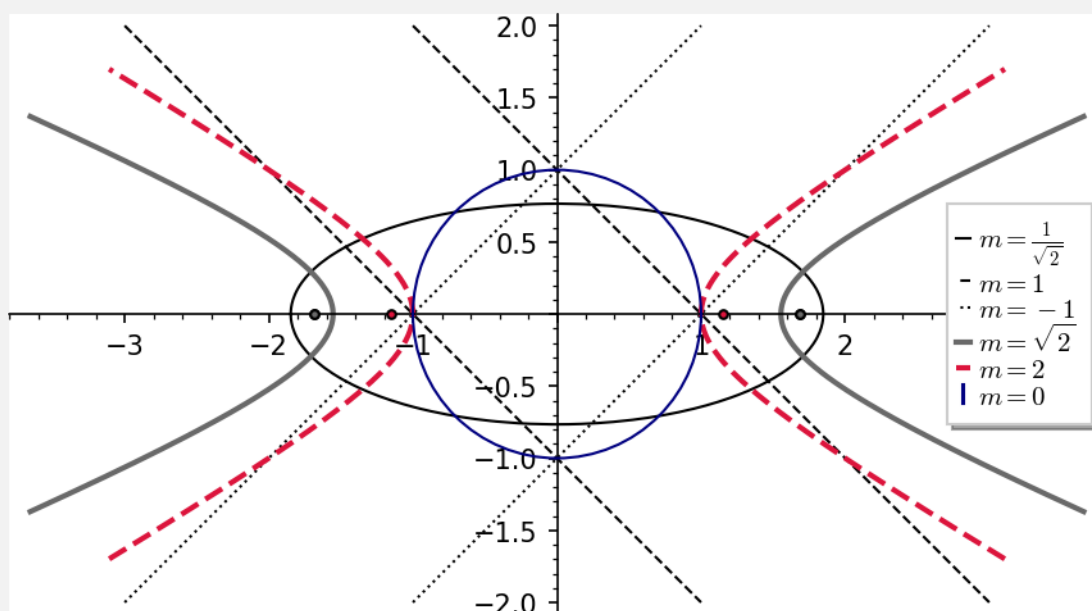
► de même, si $m = -1$, alors $x^2 - 2mxy + y^2 = (x-y)^2$, donc l'équation équivaut à $x-y = \pm 1$, ce qui correspond à deux droites parallèles;

► si $m \in]-1, 1[$, on obtient une ellipse avec $a = \frac{1}{\sqrt{1-m}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{1+m}}$. Alors $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{1-m} - \frac{1}{1+m} = \frac{2m}{1-m^2}$, puis $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{1-m^2}} \sqrt{1-m}$. Les foyers sont $\left(\pm \sqrt{\frac{2m}{1-m^2}}, 0 \right)$ dans le repère de l'équation réduite.

En particulier, $m = 0$ correspond à un cercle.

► si $|m| > 1$, on obtient une hyperbole avec $a = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{1+m}}$. Alors $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{1+m} = \frac{2}{m^2-1}$, puis $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2-1}} \sqrt{m-1}$. Les foyers sont $\left(\pm \sqrt{\frac{2}{1-m^2}}, 0 \right)$ dans le repère de l'équation réduite.

Finalement si $m \notin \{-1, 1\}$, $e = \sqrt{\frac{2m}{m+1}}$.



- * **14** Déterminer la nature et un paramétrage de la conique d'équation cartésienne $x^2 + xy + y^2 - x + y = 0$ puis son excentricité, la position des foyers et d'une directrice.

Réponse : $x^2 + xy + y^2 - x + y = x^2 + xy + y^2 - x + y = (x \quad y) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - x + y$

Réduisons $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$; $\chi_{S_1} = \begin{vmatrix} X-1 & -1/2 \\ -1/2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$. On obtient alors $S_1 = P_1 \Delta_1 P_1^\top$ avec $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta_1 = \text{diag}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Posons alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 + xy - x + y = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 + \sqrt{2}y_1$; en posant $y_2 = y_1 + \sqrt{2}$, on obtient $\frac{1}{2}y_2^2 = \frac{1}{2}y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + 1$ donc $x^2 + y^2 + xy - x + y = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1$.

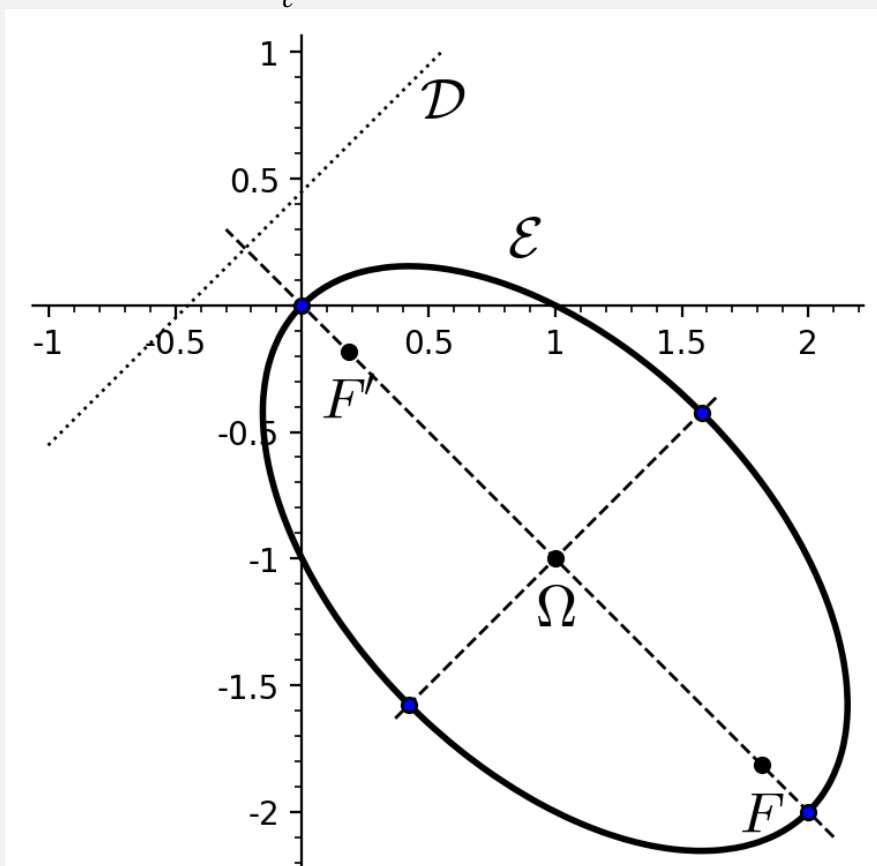
Après une rotation du repère d'angle $\frac{\pi}{4}$, suivie d'une translation de vecteur $\sqrt{2}\vec{j}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, on obtient une équation

réduite : $\frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1$, qui est l'équation d'une ellipse de paramètres $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right)$ de paramé-

trage est $t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(-\sin t + 1 + \frac{\cos t}{\sqrt{3}}, \sin t - 1 + \frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)$ car $(x_2(t), y_2(t)) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos(t), \sqrt{2}\sin t\right)$.

D'après l'équation réduite, on trouve $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$, donc $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$. La distance

entre le centre et la directrice est $d = \frac{a^2}{c} = \sqrt{3}$.



- * **15** Déterminer la nature et un paramétrage de la conique d'équation cartésienne $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 12y = 16$ puis son excentricité, la position des foyers et d'une directrice.

Réponse : $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 12y - 16 = 0 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6x + 12y - 16$

Réduisons $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\chi_{S_2} = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -2 & X+2 \end{vmatrix} = X^2 + X - 2 - 4 = (X-2)(X+3)$. On obtient alors $S_2 = P_2 \Delta_2 P_2^T$ avec $P_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Delta_2 = \text{diag}(2, -3)$.

Posons alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x_1 - y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{pmatrix}$, $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 12y - 16 = 3x_1^2 - 2y_1^2 + 6\sqrt{5}y_1 - 16$; en posant $y_2 = y_1 + \sqrt{5}$, on obtient $\frac{1}{2}y_2^2 = \frac{1}{2}y_1^2 + 2\sqrt{5}y_1 + 5$ donc $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 12y - 16 = 2x_1^2 - 3y_2^2 - 1$.

Après une rotation du repère d'angle $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$, suivie d'une translation de vecteur $\sqrt{5}\vec{j}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, on obtient

une équation réduite : $2x_2^2 - 3y_2^2 - 1$, qui est l'équation d'une hyperbole de paramètres $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$,

de paramétrage $t \mapsto \left(\pm \sqrt{2} \text{ch}(t) - \frac{\text{sh}(t)}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\text{ch}(t)}{\sqrt{10}} - \frac{2\text{sh}(t)}{\sqrt{15}} + \sqrt{2} \right)$, car $(x_2(t), y_2(t)) = \left(\pm \frac{\text{ch}(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\text{sh}(t)}{\sqrt{3}} \right)$.

D'après l'équation réduite, on trouve $a = \sqrt{\frac{7}{2}}, b = \sqrt{\frac{7}{3}}$, donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{35}{6}}$ et $e = \sqrt{\frac{5}{3}}$. La dis-

tance entre le centre et la directrice est $d = \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}$.

