PT **Exercices sur la réduction (solutions)** **2024/2025**

feuille N° 3

* **1** Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable si $(a,b,c,d) = \left(\alpha, -\alpha^2, \alpha^3, 0\right)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$?

Réponse : $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -d \\ -1 & \lambda & 0 & -c \\ 0 & -1 & \lambda & -b \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix}$, que l'on calcule par développement par rapport à la première colonne :

$\chi_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -c \\ -1 & \lambda & -b \\ 0 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -d \\ -1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} -1 & -b \\ -1 & \lambda - a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -1 & \lambda - a \end{vmatrix} \right) - d \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2\left(\lambda^2 - a\lambda - b\right) - c\lambda - d = \lambda^4 - a\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda - d$.

Si $(a,b,c,d) = \left(\alpha, -\alpha^2, \alpha^3, 0\right)$, alors

$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - \alpha\lambda^3 + \alpha^2\lambda^2 - \alpha^3\lambda = \lambda\left(\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \alpha^2\lambda - \alpha^3\right) = \lambda\left((\lambda-\alpha)\lambda^2 + \alpha^2(\lambda - \alpha)\right) = \lambda(\lambda-\alpha)\left(\lambda^2 + \alpha^2\right)$.

Si $\alpha = 0$, alors A n'est pas diagonalisable.

Si $\alpha \neq 0$, alors les racines de χ_A : $0, \alpha, i\alpha, -i\alpha$ sont distinctes, donc simples et A est diagonalisable.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2, A^3 puis A^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que A est diagonalisable et que tous les vecteurs propres de A sont vecteurs propres de B. La réciproque est-elle vraie ?

c) Soit $M = xA + yB$ avec x et y réels. Montrer que $M(x,y)$ est diagonalisable. Calculer M^n.

d) Soit $\mathscr{C} = \left\{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad AN = NA\right\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Réponse : **a)** Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

On constate que $A^3 = A$, donc $A^{2n+2} = A^2$ et $A^{2n+1} = A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; plus généralement,

$A^n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} A^2 + \dfrac{1 - (-1)^n}{2} A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Comme $A^3 = A$, on peut soupçonner que les valeurs propres de A sont des racines de $X^3 - X$, soit $\{-1, 0, 1\}$.

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ -1 & -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ = \\ C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \lambda + 1 \\ 1 - \lambda & \lambda - 1 & \lambda + 1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\lambda$.

Comme le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$, de racines simples, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, de valeurs propres $-1, 0, 1$ et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Le calcul donne $E_{-1}(A) = \mathbb{R}.(1,1,1)$, $E_1(A) = \mathbb{R}.(-1,1,0)$, et $E_0(A) = \mathbb{R}.(1,2,1)$.

On vérifie que $B.(1,1,1)^\top = B.(-1,1,0)^\top = (0,0,0)^\top$ et $B.(1,2,1)^\top = (1,2,1)^\top$. Les vecteurs propres de A sont également vecteurs propres de B (qui est donc diagonalisable).

Cependant, $(0,2,1)^\top$ est vecteur propre de B, mais pas de A.

c) Il existe une base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, simultanément propres pour A et B, donc propres pour $M(x,y) = xA + yB$.

B est une matrice de projection (valeurs propres 0 et 1), donc $B^2 = B$ et $B^m = B$ pour $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 1$.

De plus, $A.B.U_1 = A.(0) = (0)$, $A.B.U_2 = A.(0) = (0)$, et $A.B.U_3 = A.U_3 = (0)$, donc $A.B = (0)$ et de même $B.A = (0)$. Comme A et B commutent, pour $n \geqslant 1$:

$(xA + yB)^n = x^n A^n + y^n B^n = x\left(\dfrac{1 + (-1)^n}{2} A^2 + \dfrac{1 - (-1)^n}{2} A\right) + y^n B$.

Réponse : **d)** Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3), alors $A = P.\Delta.P^{-1}$, où Δ est la matrice diagonale de coefficients $(-1, 0, 1)$. Soit N une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; posons $N = P.X.P^{-1}$.
Alors $AN = NA$ équivaut à $P.\Delta.P^{-1}.P.X.P^{-1} = P.X.P^{-1}.P.\Delta.P^{-1}$, soit $\Delta.X = X\Delta$.
L'endomorphisme associé à N commute avec celui associé à A, donc laisse stable toutes les droites propres de N : il est diagonalisable dans la base (u_1, u_2, u_3), la matrice X est donc diagonale.
On en conclut que $N = P.\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma).P^{-1}$, ce qui définit un espace vectoriel de dimension 3 : $\mathscr{C} = \operatorname{Vect}(I_2, A, B)$.

* **3** Soit $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{R}^8$. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a, b, c, d, e, f, g, h, la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Réponse : M étant triangulaire supérieure, $\chi_M = (X-a)^2(X-g)^2$ donc $\operatorname{Sp}(M) = \{a, g\}$.
Si $a = g$, alors $M - aI_4 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, M n'est diagonalisable que si $\operatorname{rg}(M - aI_4) = 0$, c'est-à-dire $H = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = (0)$, soit $\boxed{b = c = d = e = f = h = 0}$.
Si $a \neq g$, alors $M - aI_4 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g-a & h \\ 0 & 0 & 0 & g-a \end{pmatrix}$ et $M - gI_4 = \begin{pmatrix} a-g & b & c & d \\ 0 & a-g & e & f \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
M est diagonalisable si, et seulement si, ces deux matrices sont de rang 2, c'est-à-dire $\boxed{b = 0 \text{ et } h = 0}$.

** **4** **a)** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Est-elle diagonalisable ? Calculer ses valeurs propres.

b) Soit $n \geqslant 3$, et $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\operatorname{rg}(B) \leqslant 2$ et que B admet au plus deux valeurs propres non nulles.

c) On admet que B est diagonalisable, et on note λ et μ deux valeurs propres non nulles de B : calculer $\lambda + \mu$ et $\lambda^2 + \mu^2$. En déduire le polynôme caractéristique de B.

Réponse :

a) Si $b = c = 0$, alors M est diagonale donc diagonalisable. Plaçons-nous donc dans le cas $(b,c) \neq (0,0)$.

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-2a & -b & -c \\ -b & X & 0 \\ -c & 0 & X \end{vmatrix} = X^2(X-2a) - c^2X - b^2X = X\left(X^2 - 2aX - (b^2+c^2)\right).$$

Le trinôme $X^2 - 2aX - (b^2+c^2)$ a pour discriminant $\Delta = 4\left(a^2+b^2+c^2\right) > 0$, donc pour racines $\alpha = a - \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $\beta = a + \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Ces deux racines sont distinctes et non nulles, donc M a trois racines distinctes $0, \alpha, \beta$.

$\boxed{M \text{ est diagonalisable, de valeurs propres simples } 0, \alpha, \beta}$.

b) Soit $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}(u, e_1)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique.

B est de rang inférieur ou égal à 2, donc d'après la formule du rang : $\dim E_0(B) = \dim \mathrm{Ker}(B) = n - \mathrm{rg}(B) \geqslant n-2 \geqslant 1$: 0 est valeur propre de B, d'ordre de multiplicité supérieur à $n-2$. Il ne peut y avoir que deux autres valeurs propres λ et μ, puisque $n \geqslant \dim E_0(B) + \dim E_\lambda(B) + \dim E_\mu(B) \geqslant n-2+1+1 = n$.

c) Si B est diagonalisable, alors $B = P.\mathrm{diag}(0,\dots,0,\lambda,\mu).P^{-1}$ donc $\mathrm{Tr}(B) = \lambda + \mu = a_1$ et $B = P.\mathrm{diag}(0,\dots,0,\lambda^2,\mu^2).P^{-1}$ donc $\mathrm{Tr}(B^2) = \lambda^2 + \mu^2$.

Or $B^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + \cdots + a_n^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Tr}(B^2) = a_1^2 + 2a_2^2 + \cdots + 2a_n^2$.

Alors $(X-\lambda)(X-\mu) = X^2 - (\lambda+\mu)X + \lambda\mu$, or $(\lambda+\mu)^2 - (\lambda^2+\mu^2) = 2\lambda\mu$, donc

$\lambda\mu = \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 - \left(a_1^2 + 2a_2^2 + \cdots + 2a_n^2\right)\right) = -\left(a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$; ainsi

$\boxed{\chi_M = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu) = X^{n-2}\left(X^2 - a_1X - \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\right)}$.

** **5** Soit $f \in E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ on définit T par $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t$.

a) Tracer rapidement $t \mapsto \min(x,t)$ sur $[0,1]$ pour $x = \frac{3}{4}$.

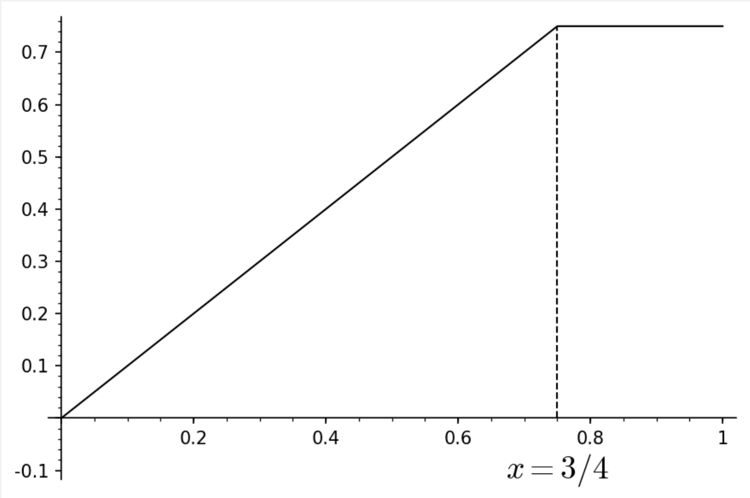
b) Soit $x \in [0,1]$, écrire $T(f)(x)$ comme somme de deux intégrales dont une des bornes est x. En déduire que $T(f)$ est dérivable, et exprimer $T(f)'$ puis $T(f)''$ en fonction de f.

c) Montrer que T définit un endomorphisme de E.

d) Que vaut $T(f)(0)$? Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Réponse :

a)



b) $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Les deux intégrales sont de classe $\mathscr{C}^1$ comme primitives d'une fonction continue.

Pour tout $x \in [0,1]$, $T(f)'(x) = x\,f(x) + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - x\,f(x)$; $\boxed{T(f)'(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t}$; alors $T(f)$ est dérivable sur $[0,1]$, et $\boxed{T(f)''(x) = -f(x)}$.

c) Alors $T(E) \subset E$, et de plus T est linéaire : si $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $T(f+\lambda g) = \int_0^1 \min(x,t)(f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^1 \min(x,t)g(t)\mathrm{d}t = T(f) + \lambda T(g)$. $\boxed{T \text{ définit un endomorphisme de } E}$.

d) $T(f)(0) = \int_0^1 \min(0,t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 0.f(t)\mathrm{d}t = 0$: $\boxed{T(f)(0) = 0}$.

Supposons que $f \neq 0$ soit un vecteur propre de T attaché à la valeur propre λ.

Alors $T(f) = \lambda f$, donc après double dérivation $-f = \lambda f''$.

Si $\lambda = 0$, alors $-f = 0$, ce qui est exclus.

Si $\lambda > 0$, en posant $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$, $f'' = -\omega^2 f$ donc $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$; comme $f(0) = \frac{1}{\lambda}T(f)(0) = 0$, $B = 0$. Mais alors $T(f)'(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{A}{\omega}[-\cos(\omega t)]_x^1 = \frac{A}{\omega}(\cos(\omega x) - \cos(\omega))$ qui ne peut être égal à $\lambda f'(x) = \frac{A\omega}{\omega^2}\cos(\omega x)$ que si $\cos\omega = 0$, soit $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $\lambda < 0$, en posant $\lambda = \frac{-1}{\omega^2}$, $f'' = \omega^2 f$ donc $f(x) = A\,\mathrm{sh}\,(\omega x) + B\,\mathrm{ch}\,(\omega x)$. Un raisonnement analogue aboutit à une impossibilité.

$\boxed{\mathrm{Sp}\,(T) = \left\{\frac{4}{(2k+1)^2\pi}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$, les sous-espaces propres correspondants étant dirigés par $\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\,x\right)$.

☞ **6** Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **a)** Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en précisant une matrice de passage dont la deuxième ligne est $(1,1,1)$.

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Étudier les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) définies par $\begin{cases} 2x_{n+1} = 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ 2y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ 2z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}$ et $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

Réponse :

a) $\chi_{2A} = \begin{vmatrix} X-4 & 2 & 2 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=}} \begin{vmatrix} X-2 & 2 & 0 \\ X-2 & X-1 & -X \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X(X-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=}$ $X(X-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & X & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = X(X-2)^2$ donc les valeurs propres de $2A$ sont 0 (simple) et 2 (double).

$2A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim E_2(2A) = 3 - 1 < m_{2A}(2)$: $\boxed{2A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

On trouve $E_0(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_1(A) = E_2(2A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A est semblable à T s'il existe une base (U, V, W) de $\mathbb{R}^3$ telle que $A.U = 0$, $A.V = V$ et $A.W = V + W$. On peut prendre $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est compatible avec une deuxième ligne de P qui est $(1,1,1)$; $(A - I_3).W = V$ équivaut au système $\begin{cases} 2x - y - 2z = \frac{1}{2} \\ x - y + z = \frac{1}{2} \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$, auquel on ajoute la condition $y = 1$.

On trouve $W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalement $A = P.T.P^{-1}$ avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

b) Alors $A^n = P.T^n.P^{-1}$. Soit à l'aide de l'écriture $T = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et du binôme de Newton, soit par récurrence, soit en utilisant des suites définies par $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = T.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on aboutit à $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n & -n \\ n - \frac{1}{2} & -n + \frac{3}{2} & -n + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

c) En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = V$, on obtient $X_{n+1} = A.X_n$ donc $X_n = A^n.X_0 = A^n.V = V$, donc $\boxed{\text{les suites } x_n, y_n, z_n \text{ sont constantes}}$.