PT **Exercices sur la réduction** **2024/2025**

feuille N° 3

☞ **1** Soit les matrices $A_2 = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A_2.

b) A_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

c) Même question pour A_3.

☞ **2** Soit les matrices $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) B_2 et C_2 sont-elles diagonalisables ? Les diagonaliser si possible.

b) Montrer que B_2 est semblable à A_2, mais pas C_2.

** Déterminer une matrice Q telle que $B_2 = Q^{-1}.A_2.Q$. *(A_2 est la matrice définie dans l'exercice 1)*

---

* **3** Soit R une matrice de rang 1.

a) Déterminer les valeurs propres de R .
(*Indication :* on vérifiera que 0 est valeur propre, et on déterminera $\dim E_0(R)$).

b) Montrer que R est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(R) \neq 0$.

---

* **4** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 1 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, canoniquement associée à l'endomorphisme f.

On considère deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $u_1 = (1,0,1,0\ldots)$ et $u_2 = (0,1,0,1,\ldots)$, et on pose $m = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et $m' = n - m$.

a) Quel est le rang de M ? En déduire la dimension de $E_0(M)$, puis une base de $E_0(M)$.

b) Montrer qu'une base de $F = \mathrm{Im}(f)$ est (u_1, u_2) ; déterminer une matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par f sur F.
En déduire deux valeurs propres de M.

c) M est-elle diagonalisable ? Montrer que $M^3 = n\,M^2 - m m'\,M$.

---

* **5** On considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = X^2 P'' - 2X P'$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$. En déduire que φ est diagonalisable, et préciser son spectre et ses sous-espaces propres.

c) Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 y'' - 2x\,y' - \lambda\,y = 0$ admet-elle une solution polynomiale ?

---

* **6** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer à l'aide de la méthode de Sarrus le polynôme caractéristique de M.

b) Grâce à une étude de fonctions, montrer que M possède une unique valeur propre réelle λ, et que λ est comprise entre 1 et 2.

c) Soit σ une valeur propre complexe, non réelle, de M. Calculer $\lambda|\sigma|^2$ et comparer les réels $|\sigma|$, 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Montrer que $M^3 = M + I_3$; en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$.

* **7** Soit trois points M_0, M_1, M_2 donnés dans le plan ; on définit une suite (M_n) en disant que M_{n+2} est le milieu de $[M_nM_{n+1}]$ et M_{n+3} est le milieu de $[M_{n+2}M_n]$.
Étudier la limite de cette suite.

Indication : on considère l'affixe complexe z_n de M_n, et $U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$; montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = A.U_n$, et diagonaliser A.

** **8** **a)** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = (0)$ (on dit que M est *nilpotente*).
Montrer que M admet 0 pour unique valeur propre et est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

b) $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, est-elle diagonalisable ?

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que, si tous les b_i sont nuls, M est diagonalisable si, et seulement si, tous les a_i sont nuls.
Dans le cas général, montrer que M admet au plus deux valeurs propres complexes non nulles.
Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 4.
On suppose tous les a_i nuls (et les b_i quelconques) ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

* **9** **a)** Réduire les matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication : on montrera que $B = Q.T.Q^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et où Q est une matrice inversible de première ligne $(1\ 2\ -1)$.

b) A et B sont-elles semblables ?

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n et B^n.

** **10** Soit $a \in \mathbb{R}$, et $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & a-1 \\ 2(a-1) & 1 & a-1 \\ 4-3a & a-2 & 2-a \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de $M_a - I_3$? Calculer le polynôme caractéristique de $M_a - I_3$, puis celui de M_a.

b) Déterminer une valeur de a telle que 2 soit valeur propre de M_a.
M_a est-elle diagonalisable pour cette valeur de a ? Diagonaliser alors M_a.

c) M_1 est diagonalisable ? Trigonaliser M_1.

Indication : On admettra que $M_1 = P_1.T_1.P_1^{-1}$ avec $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

* **11** **a)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 11 \\ 3 & -7 & 11 \end{pmatrix}$.

Déterminer au moins une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(B) = 3$.

b) Trouver des matrices M et Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les équations $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y^2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -9 \\ -3 & -4 & -9 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.