PT **Exercices sur la réduction (solutions)** **2024/2025**

feuille N° 3

☞ **1** Soit les matrices $A_2 = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A_2.

b) A_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

c) Même question pour A_3.

Réponse :

a) $\chi_{A2}(X) = \begin{vmatrix} X+11 & 6 \\ -20 & X-11 \end{vmatrix} = X^2 - 121 + 120 = X^2 - 1$.

b) χ_{A_2} est scindé à racines simples, donc A_2 est diagonalisable.

$A_2 - I_2 = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$ est de rang 1. $\operatorname{Ker}(A_2 - I_2)$ est défini par $2x + y = 0$, donc $E_1(A_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$A_2 + I_2 = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$ est de rang 1. $\operatorname{Ker}(A_2 + I_2)$ est défini par $5x + 3y = 0$, donc $E_{-1}(A_2) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Donc $A_2 = P_2.\Delta_2.P_2^{-1}$, avec $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

c) $\chi_{A_3}(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 6 & -2 \\ -4 & X+5 & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = ((X-5)(X+5)+24)(X-1) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$.

$A_3 - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim E_1(A_3) = 3 - 1 = 2 = m(1)$, donc A_3 est diagonalisable.

$E_1(A_3)$ est défini par l'équation $2x - 3y + z = 0$, donc $E_1(A_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

$A_3 + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(A_3) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $A_3 = P_3.\Delta_3.P_3^{-1}$, avec $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

☞ **2** Soit les matrices $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) B_2 et C_2 sont-elles diagonalisables ? Les diagonaliser si possible.

b) Montrer que B_2 est semblable à A_2, mais pas C_2.

** Déterminer une matrice Q telle que $B_2 = Q^{-1}.A_2.Q$. *(A_2 est la matrice définie dans l'exercice 1)*

Réponse :

a) $\chi_{B_2}(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 4 & X+3 \end{vmatrix} = X^2 - 9 + 8 = X^2 - 1$ et $\chi_{C_2}(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -4 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = X^2 - 4 + 4 = 0$.

χ_{B_2} est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, et $\mathrm{Sp}(C_2) = \{0\}$; si C_2 était diagonalisable (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$), elle serait semblable à (0), donc nulle. $\boxed{B_2 \text{ est diagonalisable (dans } \mathbb{R}\text{), mais pas } C_2}$.

b) B_2 et A_2 sont semblables à $\Delta_2 = \mathrm{diag}(-1, 1)$, c'est-à-dire qu'il existe $(P_2, Q_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^2$, $A_2 = P_2.\Delta_2.P_2^{-1}$ et $B_2 = Q_2.\Delta_2.Q_2^{-1}$. Alors $\Delta_2 = P_2^{-1}.A_2.P_2$ et $B_2 = Q_2.P_2^{-1}.A_2.P_2.Q_2^{-1} = (P_2.Q_2^{-1})^{-1}.A_2.P_2.Q_2^{-1}$.

$\boxed{A_2 \text{ et } B_2 \text{ sont semblables}}$; $\mathrm{Sp}(B_2) \neq \mathrm{Sp}(C_2)$ donc $\boxed{A_2 \text{ et } B_2 \text{ ne sont pas semblables}}$.

Un calcul analogue à celui mené pour A_2 donne $B_2 = Q_2.\Delta_2.Q_2^{-1}$, avec $Q_2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on trouve ensuite $Q_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis $\boxed{Q = P_2.Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}$.

* **3** Soit R une matrice de rang 1.

a) Déterminer les valeurs propres de R .
(*Indication :* on vérifiera que 0 est valeur propre, et on déterminera $\dim E_0(R)$).

b) Montrer que R est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(R) \neq 0$.

Réponse :

a) En posant $n = \dim(E)$, $\dim(E_0(R)) = \dim \mathrm{Ker}(R) = n - \mathrm{rg}(R) = n-1$, donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité $m(0)$: $\boxed{n-1 \leqslant m(0) \leqslant m}$.

Soit λ une éventuelle $n^{\text{ème}}$ valeur propre, alors $\lambda + (n-1)0 = \mathrm{Tr}(M)$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(R) = \{0, \mathrm{Tr}(M)\}}$.

b)
- Si $\mathrm{Tr}(R) \neq 0$, alors il y a deux valeurs propres : 0, avec $m(0) \geqslant n-1$, et $\mathrm{Tr}(R)$, avec $m(\mathrm{Tr}(R)) \geqslant 1$; $m(0) + m(\mathrm{Tr}(R)) \geqslant n - 1 + 1 = n$, donc $m(0) + m(\mathrm{Tr}(R)) = n$ et $\boxed{R \text{ est diagonalisable}}$.
- Si $\mathrm{Tr}(R) = 0$, alors il n'y a qu'une valeur propre : 0. Si R était diagonalisable, elle serait semblable à (0), donc nulle et de rang nul. $\boxed{R \text{ est non diagonalisable}}$.

* **4** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 1 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, canoniquement associée à l'endomorphisme f.

On considère deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $u_1 = (1, 0, 1, 0 \dots)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 1, \dots)$, et on pose $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et $m' = n - m$.

a) Quel est le rang de M ? En déduire la dimension de $E_0(M)$, puis une base de $E_0(M)$.

b) Montrer qu'une base de $F = \mathrm{Im}(f)$ est (u_1, u_2) ; déterminer une matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par f sur F.
En déduire deux valeurs propres de M.

c) M est-elle diagonalisable ? Montrer que $M^3 = n M^2 - m m' M$.

Réponse :

a) Toutes les lignes impaires de M sont égales à u_1, toutes les lignes paires égales à u_2, donc $\mathrm{rg}(M) = 2$, et d'après la formule du rang, $\dim E_0(M) = \dim \mathrm{Ker}(M) = n-2$.

Une base de $E_0(M)$ est formée des vecteurs colonnes de la matrice $n \times (n-2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Une base de $F = \mathrm{Im}(f)$ est obtenue à partir des *colonnes* de M après un pivot de Gauss. Or les colonnes d'ordre impair de F sont $U_1 = {u_1}^\top$ et les colonnes d'ordre pair sont $U_2 = {u_2}^\top$. (u_1, u_2) est une base de F.

$u_1.U_1 = {U_1}^\top.U_1 = \|U_1\|^2 = m$, $u_2.U_1 = {U_2}^\top.U_1 = 0$, $u_1.U_2 = {U_1}^\top.U_2 = 0$ et $u_2.U_2 = {U_2}^\top.U_2 = \|U_2\|^2 = m'$, donc

$M.U_1 = \begin{pmatrix} u_1.U_1 \\ u_2.U_1 \\ \vdots \\ u_n.U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix} = m.U_1$, et $M.U_2 = \begin{pmatrix} u_1.U_2 \\ u_2.U_2 \\ \vdots \\ u_n.U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m' \\ \vdots \\ ? \end{pmatrix} = m'.U_2$

Alors la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par f sur F est $\boxed{M' = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}$.

c) En appelant $(u_3, u_4, \dots, u_n)$ la base de $E_0(M)$ décrite dans **a)**, la base $(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de M, associés aux valeurs propres $(m, m', 0, \cdots, 0)$, donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

Comme M est diagonalisable, $M = P.\Delta.P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(m, m', 0)$, donc $(\Delta - m' I_3)(\Delta - m I_3)\Delta = (0)$ donc (en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite) : $(M - m' I_3)(M - m I_3)M = (0)$ et $\boxed{M^3 = n M^2 - m m' M}$.

* **5** On considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, et l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = X^2 P'' - 2X P'$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$. En déduire que φ est diagonalisable, et préciser son spectre et ses sous-espaces propres.

c) Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 y'' - 2x y' - \lambda y = 0$ admet-elle une solution polynomiale ?

Réponse :

a) Si $P \in E$, alors $\deg P'' \leqslant n-2$, donc $X^2 P'' \in E$ et de même $X P' \in E$. Donc $\varphi(P) \subset E$: $\varphi(E) \subset E$.

Par ailleurs, si $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(P + \lambda Q) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$ donc φ est linéaire ; $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

b) Pour $j \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^j) = X^2 j(j-1)X^{j-2} - 2X jX^{j-1} = j(j-3)X^j$ donc les vecteurs de la base canonique de E : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ sont des vecteurs propres de φ. En conséquence, $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{j(j-1), j \in [\![0, n]\!]\} = \{0, -2, -2, 0, 4, \dots, n(n-3)\}}$: 0 et -2 sont doubles et les autres sont simples.

En effet, soit f la fonction définie par $f(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 3$, donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Alors, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $j > i \geqslant 2$, $f(j) > f(i)$, et par ailleurs $f(0) = f(3) = 0$ et $f(1) = f(2) = -2$. Ceci garantit que les valeurs propres $j(j-3)$, $j \geqslant 4$, sont simples.

c) Une solution polynomiale non nulle de $x^2 y'' - 2x y' - \lambda y = 0$ est une fonction polynomiale, donc un vecteur propre de φ : nécessairement $\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)}$.

∗ **6** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer à l'aide de la méthode de Sarrus le polynôme caractéristique de M.

b) Grâce à une étude de fonctions, montrer que M possède une unique valeur propre réelle λ, et que λ est comprise entre 1 et 2.

c) Soit σ une valeur propre complexe, non réelle, de M. Calculer $\lambda|\sigma|^2$ et comparer les réels $|\sigma|$, 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Montrer que $M^3 = M + I_3$; en déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$.

Réponse :

a) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = X(X^2-1) + 0 + 0 + (X-1) - X = X^3 - X - 1$.

b) Soit φ la fonction qui à x associe $\chi_M(x) = x^3 - x - 1$. φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\varphi'(x) = 3x^2 - 1$.

De plus, $\varphi\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = m_1 = \dfrac{2 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$ et $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = m_2 = -\dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	m_1	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\varphi(x) < 0$, et que φ est une bijection de $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ dans $[m_2, +\infty[$.

$\varphi(1) = -1$ et $\varphi(2) = 5$ donc φ admet une unique racine réelle $\lambda \in [1,2]$.

c) $\varphi \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$, donc il admet deux racines complexes conjuguées : σ et $\overline{\sigma}$.

$\lambda|\sigma|^2 = \lambda\sigma\overline{\sigma}$ est le produit des racines de φ, donc c'est l'opposé du coefficient constant de φ : $\lambda|\sigma|^2 = 1$. Comme $\lambda \in [1,2]$, $|\sigma| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

d) En utilisant le même raisonnement qu'en 4c), $\varphi(M) = M^3 - M - I_3 = (0)$ donc $\boxed{M^3 = M + I_3}$ et, en multipliant par M^n : $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$.

∗ **7** Soit trois points M_0, M_1, M_2 donnés dans le plan ; on définit une suite (M_n) en disant que M_{n+2} est le milieu de $[M_n M_{n+1}]$ et M_{n+3} est le milieu de $[M_{n+2} M_n]$.
Étudier la limite de cette suite.

Indication : on considère l'affixe complexe z_n de M_n, et $U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$; montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = A.U_n$, et diagonaliser A.

Réponse : Soit z_n l'affixe complexe de M_n, alors $z_{n+2} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n+1})$ et $z_{n+3} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n+2})$.

En posant $U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$, on trouve $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$. Posons $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$\chi_{2A}(X) = \begin{vmatrix} X & -2 & 0 \\ -1 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X & -2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - X - 2) = (X-1)(X+1)X-2)$.

Comme $\chi_{2A}(X)$ est scindé à racines simples, $2A$ est diagonalisable, et $2A = P.\mathrm{diag}(-1,1,2).P^{-1}$, puis pour $n \in \mathbb{N}$ $2^n A^n = P.\mathrm{diag}((-1)^n, 1, 2^n).P^{-1}$ soit $A^n = P.\mathrm{diag}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n, \frac{1}{2^n}, 1\right).P^{-1}$ donc A^n tend vers $P.\mathrm{diag}(0,0,1).P^{-1}$.

Le calcul donne $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc la suite (M_n) tend vers le barycentre de (M_0, M_1), de coefficients $(1,2)$.

∗∗ **8** **a)** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = (0)$ (on dit que M est *nilpotente*).
Montrer que M admet 0 pour unique valeur propre et est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

b) $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, est-elle diagonalisable ?

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que, si tous les b_i sont nuls, M est diagonalisable si, et seulement si, tous les a_i sont nuls.
Dans le cas général, montrer que M admet au plus deux valeurs propres complexes non nulles.
Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 4.
On suppose tous les a_i nuls (et les b_i quelconques) ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Réponse :

a) Si M est une matrice réelle, carrée d'ordre n et nilpotente, alors $\det(M^p) = \det(M)^p = 0$ donc $\det(M) = 0$ et M est non inversible. Ceci signifie que $0 \in \mathrm{Sp}(M)$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors il existe un vecteur-colonne non nul X tel que $M.X = \lambda X$, donc $M^p.X = \lambda^p x$; mais comme $M^p = (0)$ et que $X \neq (0)$, $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$. $\mathrm{Sp}(M) = 0$, ce qui signifie que M ne peut être diagonalisable que si $M \sim (0)$, donc si $M = (0)$.

b) $T = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ est de rang 1 (toutes ses colonnes sont proportionnelles), et sa trace est nulle, donc $\boxed{T \text{ est non diagonalisable}}$ (voir l'exercice 3).
On peut par ailleurs constater que $T^2 = (0)$, donc T est nilpotente non nulle et donc non diagonalisable.

c) On constate que si tous les b_i sont nuls, alors M est de rang 1 au plus, et $M^2 = (0)$. M n'est diagonalisable que si $M = (0)$, c'est-à-dire si les a_i sont nuls.
Si les a_i et les b_i sont non tous nuls, la matrice M est de rang 2.
Alors $F = \mathrm{Im}(M)$ est stable par l'endomorphisme f canoniquement associé. Considérons les vecteurs $U = (0, 0, \ldots, 1)^\top$ et $V = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)^\top$ qui engendrent $\mathrm{Im}(M)$: $M.U = V$ et $M.V = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k.U$, donc la matrice M' de l'endomorphisme induit par f sur F est $M' = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de M', qui sont les racines carrées complexes de $A = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$, sont aussi valeurs propres de A.
Donc M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si $A \neq 0$, dans $\mathbb{R}$ si $A > 0$, et n'est pas diagonalisable si $A = 0$.

* **9** **a)** Réduire les matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) A et B sont-elles semblables ?

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n et B^n.

Réponse :

a) $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 2 & 2 \\ 2 & X+1 & 2 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=}} \begin{vmatrix} X-1 & 2 & 0 \\ 1-X & X+1 & 1-X \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$

$\chi_A(X) = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & X+3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1).$

Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 1 (double).

Vérifions que A est diagonalisable en déterminant la dimension de $E_1(A)$ qui devrait être 2 :

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2, donc $E_1(A)$ est le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$; A est donc diagonalisable, et $\boxed{E_1(A) = \operatorname{Vect}((1,-1,0)^\top, (0,1,-1)^\top)}$.

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(A)$ est la droite définie par les équations $y + z = 0, x + z = 0$. $\boxed{E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}((1,1,-1)^\top)}$.

$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & -2 \\ 2 & X+3 & 2 \\ 0 & -2 & X-3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=}} \begin{vmatrix} X+1 & X+1 & 0 \\ 2 & X+3 & 2 \\ 1-X & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & X+3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\chi_B(X) \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} (X+1)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & X+3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X+1)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & X+3 \end{vmatrix} = (X+1)(X-1)^2.$

$\chi_A = \chi_B$, et les valeurs propres de B sont -1 (simple) et 1 (double).

Vérifions si B est diagonalisable en déterminant la dimension de $E_1(B)$ qui devrait être 2 :

$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2, donc $E_1(B)$ est une droite vectorielle définie par les équations cartésiennes $y + z = 0$ et $x + 2y + z = 0$, soit $x + y = 0$ et $y + z = 0$.

$E_1(B) = \operatorname{Vect}(U_2)$ où ${U_2}^\top = (2,-2,2)$ et $\boxed{B \text{ est non diagonalisable}}$.

Un calcul simple aboutit à $E_{-1}(B) = \operatorname{Vect}(U_1)$ où $U_1 = (1,-2,1)^\top$.

Pour compléter la base, cherchons un vecteur U_3 tel que $B.U_3 = U_2 + U_3$, c'est-à-dire $(B - I_3).U_3 = U_2$; avec $U_3 = (x,y,z)^\top$, ceci équivaut au système $\begin{cases} 2y + 2z & = 2 \\ -2x - 4y - 2z & = -2 \end{cases}$. La condition sur la première ligne équivaut à $x = 1$; on trouve donc ${U_3}^\top = (-1,1,0)$.

Finalement $B = Q.T.Q^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$.

b) A et B ne sont pas semblables, bien qu'elles aient le même polynôme caractéristique, car A est diagonalisable (donc $A^2 = I_2$: A est une matrice de symétrie), mais pas B.

On peut aussi remarquer que $\dim(E_1(A)) = 2$, et $\dim(E_1(B)) = 1$; A et B ne peuvent pas être semblables.

c) $A^2 = I_n$, donc $A^n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} I_n + \dfrac{1+(-1)^n}{2} A$. De plus, $T = \operatorname{diag}(-1,1,1) + N$, avec

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\boxed{B^n = \begin{pmatrix} -(-1)^n - 2n + 2 & -(-1)^n + 1 & 2n \\ 2(-1)^n + 2n - 2 & 2(-1)^n - 1 & -2n \\ -(-1)^n - 2n + 1 & -(-1)^n + 1 & 2n + 1 \end{pmatrix}}$.

$**$ **10** Soit $a \in \mathbb{R}$, et $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & a-1 \\ 2(a-1) & 1 & a-1 \\ 4-3a & a-2 & 2-a \end{pmatrix}$.

a) Quel est le rang de $M_a - I_3$? Calculer le polynôme caractéristique de $M_a - I_3$, puis celui de M_a.

b) Déterminer une valeur de a telle que 2 soit valeur propre de M_a.
M_a est-elle diagonalisable pour cette valeur de a ? Diagonaliser alors M_a.

c) M_1 est diagonalisable ? Trigonaliser M_1.

Indication : On admettra que $M_1 = P_1.T_1.P_1^{-1}$ avec $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse :

a) $M_a - I_3 = \begin{pmatrix} 2(a-1) & 0 & a-1 \\ 2(a-1) & 0 & a-1 \\ 4-3a & a-2 & 1-a \end{pmatrix}$. Après la transformation $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 + C_2$,

$M_a - I_3 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ donc le rang de $M_a - I_3$ est 1 si $a = 1$ ou $a = 2$, et vaut 2 sinon.

Avec la même transformation,

$$\chi_{M_a - I_3}(X) = \begin{vmatrix} X+2(1-a) & 0 & 1-a \\ 2(1-a) & X & 1-a \\ 3a-4 & 2-a & X+a-1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X & 0 & 1-a \\ X & X & 1-a \\ 2X & 2-a & X+a-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} \begin{vmatrix} X & 0 & 1-a \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 2-a & X+1-a \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 0 \\ 2-a & X+1-a \end{vmatrix} = X^2(X+1-a).$$

Or $\chi_{M_a - I_3}(X) = \det(XI_3 - M_a + I_3) = \det((X+1)I_3 - M_a) = \chi_{M_a}(X+1)$ donc

$\boxed{\chi_{M_a}(X) = \chi_{M_a - I_3}(X-1) = (X-1)^2(X-a)}$.

b) $\chi_{M_a}(2) = 4(2-a)$ ne s'annule que si $\boxed{a = 2}$. Alors $\mathrm{Sp}(M_a) = \{1, 2\}$, et $M_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim E_1(M_2) = 3 - 1 = 2 = m(1)$ et $\boxed{M_2 \text{ est diagonalisable}}$.

$M_2 = P_2.\Delta_2.P_2^{-1}$ avec $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

c) $\mathrm{Sp}(M_1) = \{1\}$. $M_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dim E_1(M_2) = 3 - 1 = 2 < m(1)$ et $\boxed{M_1 \text{ est non diagonalisable}}$.

$E_1(M_1) = \mathrm{Vect}(U, V)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut compléter ce système en une base (U, V, W) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f_1 est T_1 en résolvant l'équation vectorielle $f_1(W) = V + W$, soit $f_1(W) - W = V$, équivalente à $(M_1 - I_3).W = V$, donc à $x - y = 1$ (et, en tenant compte des indications, $x = 1$ et $z = 0$).

Finalement $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

∗ **11** **a)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 11 \\ 3 & -7 & 11 \end{pmatrix}$.

Déterminer au moins une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(B) = 3$.

b) Trouver des matrices M et Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les équations $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y^2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -9 \\ -3 & -4 & -9 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Réponse :

a) On commence par réduire A, et, pour cela, on calcule $\chi_A(X) =$

$\begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -3 & X+7 & -11 \\ -3 & 7 & X-11 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -3 & X+7 & X-4 \\ -3 & 7 & X-4 \end{vmatrix} \underset{=}{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} (X - 4) \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -3 & X+7 & 1 \\ 0 & -X & 0 \end{vmatrix}$

$X(X-4)\begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-4)$ scindé à racines simples,

donc A est diagonalisable, et les sous-espaces propres sont des droites.

$E_0(A)$ est défini par le système $\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 3x - 7y + 11z & = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ -4y + 8z & = 0 \end{cases}$; on trouve $E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul analogue aboutit à $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $A = P.\Delta.P^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \mathrm{diag}(0, 1, 4)$.

En posant $D = \mathrm{diag}(0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ et $B = P.D.P^{-1}$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$, on obtient $D^2 = \Delta$ donc $B^2 = A$, et d'autre part $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(D) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ qui vaut 3 si, et seulement si, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Ceci fournit une solution satisfaisant les deux conditions imposées ; on trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $M^2 = \mathrm{diag}(-1, -1, 2)$ n'a clairement pas de solution diagonale dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Une solution de $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ s'écrit : $M = \begin{pmatrix} R & (0) \\ (0) & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ où $R \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = -I_2$.

Dans toute base du type $(x, r(x))$, la matrice de l'endomorphisme r associé à R s'écrit $R' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $R = K.R'.K^{-1}$, $K \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Ceci fournit une infinité de solutions de $M^2 = \mathrm{diag}(-1, -1, 2)$.

On trouve les solutions de $Y^2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -9 \\ -3 & -4 & -9 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} = C$ en diagonalisant C : $C = Q.\mathrm{diag}(-1, -1, 2).Q^{-1}$

avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; une des solutions est $Y_0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-3 & -3\sqrt{2}-4 \\ -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & 3\sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.