PT Exercices sur les matrices et déterminants 2024/2025

feuille N° 2

☞ **1** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base du noyau et de l'image de A. $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont-ils supplémentaires ?

b) Mêmes questions concernant $\mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Im}(B)$.

c) On considère la base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: $\mathscr{B} = (U, V, W) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Écrire la matrice de changement de base de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$, puis écrire la matrice B' de l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base $\mathscr{B}$.

---

* **2** Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On définit la matrice d'ordre $2n$: $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et $B - A$.

b) Montrer que M est inversible si et seulement si A et $B - A$ le sont et, dans ce cas, verifier que
$M^{-1} = \begin{pmatrix} (B-A)^{-1}.A^{-1}.B & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$

⚠ *Attention,* A et B ne commutent pas forcément !

---

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A = I_n - N \quad \text{et} \quad B = I_n - J.$$

a) On appelle respectivement φ et ψ les endomorphismes respectifs canoniquement associés à N et J, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$:
Montrer que pour $k \in [\![0, n]\!]$: $\varphi^k(e_j) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant k$, et $\varphi^k(e_j) = e_{j-k}$ si $j > k$ et que $\psi^k(e_j) = e_{n+j-k}$ si $1 \leqslant j \leqslant k$, et $\psi^k(e_j) = e_{j-k}$ si $j > k$.
En déduire que $N^n = (0)$ et que $J^n = I_n$.

b) Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(I_n - M)\left(\sum_{k=0}^{n-1} M^k\right) = I_n - M^n$.

En déduire que $A = I_n - N$ est inversible, et préciser son inverse.
$B = I_n - J$ est-il inversible ?

c) Soit a un réel, et la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En remarquant que $T = \sum_{k=0}^{n-1} a^k J^k$, montrer que T est inversible et calculer son inverse.

* **4** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AX = XA$, et celles vérifiant $BX = XB$.

b) Déterminer, dans la base $((1,-2,1),(1,-1,1),(-1,1,0))$, la matrice C' de l'endomorphisme γ défini par C dans la base canonique.

c) Déterminer les matrices $Y \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $C'Y = YC'$, puis les matrices $X \in M_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $CX = XC$. Indication : on pourra poser $X = P.Y.P^{-1}$.

☞ **5** Calculer les déterminants suivants, sous forme aussi factorisée que possible :

a) $\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} x & a & b & y \\ a & x & y & b \\ b & y & x & a \\ y & b & a & x \end{vmatrix}$

** **6** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, on considère les déterminants de taille n :

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n(a,b) = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{vmatrix}.$$

a) Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

b) Dans $P_n(x)$, effectuer les opérations de pivot de Gauss : $C_j \longleftarrow C_j - C_n$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, puis mettre en facteur $(x-1)$ dans les $n-1$ premières colonnes, puis $L_i \longleftarrow L_i + L_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$; en déduire la valeur de $P_n(x)$, sous forme factorisée.

c) En déduire la valeur de $\Delta_n(a,b)$ sous forme factorisée.

d) On considère la matrice $K_n \in M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients dont égaux à 1. Montrer que $K_n^2 = n.K_n$, puis déterminer l'inverse de la matrice $M = (b-a)I_n + aK_n$ sous la forme $xI_n + yK_n$.

* **7** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $(a,b,c) \in \mathbb{K}^2$, $(a \neq c)$ on considère le déterminant de taille n :

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} b+x & a+x & \cdots & a+x \\ c+x & b+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ c+x & \cdots & c+x & b+x \end{vmatrix}.$$

a) En effectuant les transformations $C_m \longleftarrow C_m - C_1$, $2 \leqslant m \leqslant n$, montrer que Q_n est un polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$.

b) En écrivant $Q_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$, et en utilisant les valeurs de $Q_n(-a)$ et de $Q_n(-c)$, déterminer une expression de β_n en fonction de n, a, b et c et en déduire une expression de $Q_n(0)$.

* **8** **Déterminants de Vandermonde**

On considère n nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$, et pour $p \in \{2, \ldots n\}$, on pose :

$$V(a_1,a_2,\cdots,a_p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & a_p^{p-1} \end{vmatrix} \text{ et } P_{p-1}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & X \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & X^{p-1} \end{vmatrix}.$$

On pose par ailleurs $V(a_1) = 1$, et $P_1(X) = X - a_1$.

a) S'il existe un couple d'entiers (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $a_i = a_j$, montrer que $V(a_1,\cdots,a_p) = 0$.
Si les a_i sont distincts, montrer que $P_{p-1}(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, de racines $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ et de coefficient dominant $V(a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})$.
En déduire que *dans tous les cas* $V(a_1,a_2,\cdots,a_p) = (a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_{p-1})V(a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})$.

b) Montrer que $V(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

c) Calculer les déterminants $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3)$: $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$