# PT Exercices sur les matrices et déterminants (solutions) 2024/2025

*feuille N° 2*

☞ **1** On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

**a)** Déterminer une base du noyau et de l'image de $A$. $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont-ils supplémentaires ?

**b)** Mêmes questions concernant $\mathrm{Ker}\,(B)$ et $\mathrm{Im}\,(B)$.

**c)** On considère la base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ : $\mathscr{B}=(U,V,W)=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Écrire la matrice de changement de base de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$, puis écrire la matrice $B'$ de l'endomorphisme canoniquement associé à $B$ dans la base $\mathscr{B}$.

**Réponse :**

**a)** Les colonnes de $A$ engendrent $\mathrm{Im}\,(A)$, donc on obtient une base de $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'un pivot de Gauss sur les colonnes de $A$ :

$A\underset{C}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{C}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. $A$ est de rang 2, et $\boxed{\mathrm{Im}\,(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right).}$

D'après la formule du rang, $\mathrm{Ker}\,(A)$ est de dimension $3-2=1$. On peut déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$ en résolvant le système $A.X=(0)$, ce qui peut se faire par pivot de Gauss sur les lignes de $A$ :

$A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, ce qui correspond au système $\begin{cases}x+y&=0\\y+z&=0\end{cases}$ : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).}$

Un pivot de Gauss sur $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, montre que $\boxed{\mathrm{Ker}\,(A)\text{ et }\mathrm{Im}\,(A)\text{ sont supplémentaires}}$.

**b)** Si on appelle $(C_1,C_2,C_3)$ les colonnes de $A$, celles de $B$ sont $(C_1,C_1-C_3,C_3)$ : $\mathrm{Im}\,(B)=\mathrm{Im}\,(A)$.

On peut déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(B)$ en résolvant le système $B.X=(0)$, ce qui peut se faire par pivot de Gauss sur les lignes de $B$ :

$B\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$, ce qui correspond au système $\begin{cases}x+y&=0\\y-z&=0\end{cases}$ : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right).}$

Puisque $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}\,(B)\subset\mathrm{Im}\,(B)$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(B)\text{ et }\mathrm{Im}\,(B)\text{ ne sont pas supplémentaires}}$.

**c)** La matrice de changement de base de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$ est $P=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

On peut inverser $P$ en complétant le pivot de Gauss sur les lignes de $P$, ou bien en résolvant le système $P.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ :

$$\begin{cases}2x+y+z&=a\\-y&=b\\-x-y-z&=c\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}2x+z&=a+b\\y&=-b\\x+z=b-c&\end{cases}\text{ puis }\begin{cases}x&=a+b\\y=-b&\\z&=-a+b-2c\end{cases}.$$

Alors $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$. On trouve alors $\boxed{B'=P^{-1}.B.P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.}$

* **2** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On définit la matrice d'ordre $2n$ : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

**a)** Déterminer le rang de $M$ en fonction de ceux de $A$ et $B-A$.

**b)** Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $A$ et $B-A$ le sont et, dans ce cas, verifier que $M^{-1} = \begin{pmatrix} (B-A)^{-1}.A^{-1}.B & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$

⚠ *Attention,* $A$ et $B$ ne commutent pas forcément!

**Réponse :**

**a)** Les opérations de pivot de Gauss sur les lignes et sur les colonnes conservent le rang d'une matrice, or : $M \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B-A \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B-A)}$.

**b)** Ces mêmes opérations de pivot de Gauss sur les lignes et sur les colonnes (transvections) conservent le déterminant : $\det(M) = \det(A)\det(B-A)$ donc $\boxed{\det(M) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0 \text{ et } \det(B-A) \neq 0}$.

Un calcul simple montre que $\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = ((b-a)a)^{-1} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$. On s'en inspire avec précaution pour obtenir $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A^{-1}.B & -I \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B-A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} (B-A)^{-1}.A^{-1}.B & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}}$

**3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = I_n - N \qquad \text{et} \qquad B = I_n - J.$$

**a)** On appelle respectivement $\varphi$ et $\psi$ les endomorphismes respectifs canoniquement associés à $N$ et $J$, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ :
Montrer que pour $k \in [\![0, n]\!]$ : $\varphi^k(e_j) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant k$, et $\varphi^k(e_j) = e_{j-k}$ si $j > k$ et que $\psi^k(e_j) = e_{n+j-k}$ si $1 \leqslant j \leqslant k$, et $\psi^k(e_j) = e_{j-k}$ si $j > k$.
En déduire que $N^n = (0)$ et que $J^n = I_n$.

**b)** Soit $M$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $(I_n - M)\left(\sum_{k=0}^{n-1} M^k\right) = I_n - M^n$.

En déduire que $A = I_n - N$ est inversible, et préciser son inverse.
$B = I_n - J$ est-il inversible?

**c)** Soit $a$ un réel, et la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \ldots & & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \ldots & & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En remarquant que $T = \sum_{k=0}^{n-1} a^k J^k$, montrer que $T$ est inversible et calculer son inverse.

**Réponse :**

**a)** $\varphi^k(e_1)=0$, et $\varphi(e_j)=e_{j-1}$ si $j>1$, ce qui montre la propriété au rang 1 (elle est claire au rang 0).

On procède ensuite par récurrence : si $\varphi^k(e_j)=0$ pour $1\leqslant j\leqslant k$, et $\varphi^k(e_j)=e_{j-k}$ pour $j>k$, alors $\varphi^{k+1}(e_j)=0$ pour $1\leqslant j\leqslant k$, $\varphi^{k+1}(e_k)=\varphi(e_1)=0$, et pour $j>k+1$, $\varphi^{k+1}(e_j)=\varphi(e_{j-k})=e_{j-k-1}$ ce qui montre l'hérédité.

De même, $\psi(e_1)=e_{n+1-1}$, et $\psi(e_j)=e_{j-1}$ si $j>1$, ce qui montre la propriété au rang 1 (elle est claire au rang 0).

On procède ensuite par récurrence : si $\psi^k(e_j)=e_{n+j-k}$ pour $1\leqslant j\leqslant k$, et $\psi^k(e_j)=e_{j-k}$ pour $j>k$ alors $\psi^{k+1}(e_j)=e_{n+j-k-1}$ pour $1\leqslant j\leqslant k$, $\psi^{k+1}(e_{k+1})=\psi(e_1)=e_n=e_{n+k+1-k-1}$, et pour $j>k+1$, $\psi^{k+1}(e_j)=\psi(e_{j-k})=e_{j-k-1}$ ce qui montre l'hérédité.

En prenant $k=n$, on trouve $\varphi^n=0$ et $\psi^n=\mathrm{id}$, donc $\boxed{N^n(0) \text{ et } J^n=I_n.}$

**b)** $(I_n-M)\left(\sum_{k=0}^{n-1}M^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}M^k-\sum_{k=0}^{n-1}M^{k+1}=I_n+\sum_{k=0}^{n-1}M^k-\sum_{k=0}^{n-1}M^{k+1}-M^n=I_n-M^n$. En prenant $M=N$, on trouve $(I_n-N)\left(\sum_{k=0}^{n-1}N^k\right)=I_n-M^n=I_n$ donc $\boxed{A=I_n-N \text{ est inversible}}$, et $\boxed{A^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}N^k}$.

En prenant $M=J$, on trouve $(I_n-J)\left(\sum_{k=0}^{n-1}N^k\right)=I_n-J^n=(0)$ ; $\boxed{B=I_n-J \text{ n'est pas inversible}}$.

**c)** $\sum_{k=0}^{n-1}a^kN^k$ est égal à $T$, et par ailleurs en prenant $M=aJ$ : $(I_n-aJ).T=I_n-a^nN^n=I_n$ donc $\boxed{T \text{ est inversible et } T^{-1}=I_n-aJ.}$

* **4** On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\4&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

**a)** Déterminer les matrices $X\in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AX=XA$, et celles vérifiant $BX=XB$.

**b)** Déterminer, dans la base $((1,-2,1),(1,-1,1),(-1,1,0))$, la matrice $C'$ de l'endomorphisme $\gamma$ défini par $C$ dans la base canonique.

**c)** Déterminer les matrices $Y\in M_3(\mathbb{R})$ telles que $C'Y=YC'$, puis les matrices $X\in M_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $CX=XC$. Indication : on pourra poser $X=P.Y.P^{-1}$.

**Réponse :**

**a)** Avec $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ : $A.X = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}, X.A = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+2d & 2c+d \end{pmatrix} A.X - X.A = \begin{pmatrix} -2b+2c & -2a+2d \\ 2a-2d & 2b-2c \end{pmatrix}$

donc $A.X = X.A$ équivaut au système $(b = c, a = d)$ ; Les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AX = XA$ forment le plan vectoriel engendré par $I_2$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B.X = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}, X.B = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$, et $B.X - X.B = \begin{pmatrix} 2c & -2a+2d \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$.

donc $B.X = X.B$ équivaut au système $(c = 0, a = d)$ ; Les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $BX = XB$ forment le plan vectoriel engendré par $I_2$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** La matrice de passage vers la base est

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $C' = P^{-1}.C.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**c)** $C' = \text{diag}(2, 1, -1)$ est une matrice diagonale. Soit $Y$ une matrice de colonnes $(C_1, C_2, C_3)$ et de lignes $L_1, L_2, L_3$, alors $C'.M$ a pour lignes $2L_1, L_2, -L_3$ et $M.C'$ a pour colonnes $(2C_1, C_2, -C_3)$.

Ces deux matrices ne peuvent être égales que si les coefficients non diagonaux de $M$ sont nuls, c'est-à-dire si $M$ est diagonale.

Avec $X = P.Y.P^{-1}$, $CX = XC$ équivaut à $C.P.Y.P^{-1} = P.Y.P^{-1}.C$ donc en multipliant à droite par $P$ et à gauche par $P^{-1}$ : $P^{-1}.C.P.Y = Y.P^{-1}.C.P$ : $C'Y = YC'$. On est ramené à la question précédente, c'est-à-dire $Y = \text{diag}(a, b, c)$ c'est-à-dire $\boxed{X = P.\text{diag}(a, b, c).P^{-1}}$.

☞ **5** Calculer les déterminants suivants, sous forme aussi factorisée que possible :

**a)** $\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} x & a & b & y \\ a & x & y & b \\ b & y & x & a \\ y & b & a & x \end{vmatrix}$

**Réponse :** **a)** Remarquons que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}$ ; en passant au déterminant :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma).}$$

**b)** $D_b = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -abc+abc = 0$ (Sarrus). On peut aussi remarquer que $D_b = \det(B)$ avec $B^{\mathsf{T}} = -B$, donc $\det(B) = \det(B^{\mathsf{T}}) = (-1)^3 \det(B) = -\det(B)$ donc $\boxed{D_b = \det(B) = 0}$.

**c)** $D_c \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} \begin{vmatrix} b-c & a(b-c) & (b-c)(b+c) \\ b-a & c(b-a) & (b-a)(b+a) \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & c & b+a \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} (b-a)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & a-c & c-a \\ 1 & c & b+a \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & c & b+a \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

$\underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (b-a)(c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & a+b+c & b+a \\ c+a & c^2+a^2+ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ c+a & c^2+a^2+ca \end{vmatrix}$

Or $\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ c+a & c^2+a^2+ca \end{vmatrix} = c^2+a^2+ca-(a+c)^2-b(a+c) = -ac-bc-ba$ donc

$\boxed{D_c = (b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ca)}$.

**d)** $D_d \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{=} \begin{vmatrix} x-y & a-b & b & y \\ a-b & x-y & y & b \\ b-a & y-x & x & a \\ y-x & b-a & a & x \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} x-y & a-b & b & y \\ a-b & x-y & y & b \\ 0 & 0 & x+y & a+b \\ 0 & 0 & a+b & x+y \end{vmatrix}$

$D_d = \begin{vmatrix} x-y & a-b \\ a-b & x-y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+y & a+b \\ a+b & x+y \end{vmatrix} = \big((x-y)^2-(a-b)^2\big)\big((x+y)^2-(a+b)^2\big)$ donc

$\boxed{D_d = (x-y+a-b)(x-y-a+b)(x+y+a+b)(x+y-a-b).}$

** **6** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, on considère les déterminants de taille $n$ :

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n(a,b) = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{vmatrix}.$$

**a)** Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

**b)** Dans $P_n(x)$, effectuer les opérations de pivot de Gauss : $C_j \longleftarrow C_j - C_n$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, puis mettre en facteur $(x-1)$ dans les $n-1$ premières colonnes, puis $L_i \longleftarrow L_i + L_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ ; en déduire la valeur de $P_n(x)$, sous forme factorisée.

**c)** En déduire la valeur de $\Delta_n(a,b)$ sous forme factorisée.

**d)** On considère la matrice $K_n \in M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients dont égaux à 1. Montrer que $K_n^2 = n.K_n$, puis déterminer l'inverse de la matrice $M = (b-a)I_n + aK_n$ sous la forme $xI_n + yK_n$.

**Réponse :**

**a)** $P_2(x)=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}=x^2-1$ et $P_3(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$.

**b)** $P_n(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1-x & x-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-x & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-x & x \end{vmatrix}=(x-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

$P_n(x)=(x-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x+(n-1) \end{vmatrix}$ $\boxed{P_n(x)=(x-1)^{n-1}(x+(n-1))}$.

**c)** Si $a=0$, alors $\Delta_n(a,b)=b^n$ ; supposons alors $a\neq 0$.

Comme le déterminant est multilinéaire, on peut mettre $a$ en facteur dans chaque colonne, et $\Delta_n(a,b)=a^nP_n\left(\frac{b}{a}\right)=a^n\left(\frac{b}{a}-1\right)^{n-1}\left(\frac{b}{a}+(n-1)\right)=(b-a)^{n-1}(b+(n-1)a)$, valeur juste même si $a=0$ : $\boxed{\Delta_n(a,b)=(b-a)^{n-1}(b+(n-1)a)}$.

**d)** Les coefficients de $K_n$ dont tous égaux à $\sum_{k=1}^{n}1=n$, donc $K_n^2=n.K_n$.

Alors $M.(xI_n+yK_n)=\big((b-a)I_n+aK_n\big)(xI_n+yK_n)=x(b-a)I_n+(ax+(b-a)y)K_n+ayK_n^2=x(b-a)I_n+(ax+(b-a)y+nay)K_n$.

Comme $(K_n,I_n)$ forme un système libre, ceci n'est égal à $I_n$ que si $\begin{cases} x(b-a) & =1 \\ ax+(b+(n-1)a)y & =0 \end{cases}$.

Si $a\neq b$ et $(n-1)a\neq -b$, (c'est-à-dire $\det(M)\neq 0$), ce système a une solution unique

$(x,y)=\left(\frac{1}{b-a},\frac{-1}{(b-a)(b+(n-1)a)}\right)$ donc $\boxed{M^{-1}=\frac{1}{b-a}I_n-\frac{1}{(b-a)(b+(n-1)a)}K_n}$.

* **7** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $(a,b,c) \in \mathbb{K}^2$, $(a \neq c)$ on considère le déterminant de taille $n$ :

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} b+x & a+x & \cdots & a+x \\ c+x & b+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ c+x & \cdots & c+x & b+x \end{vmatrix}.$$

**a)** En effectuant les transformations $C_m \longleftarrow C_m - C_1$, $2 \leqslant m \leqslant n$, montrer que $Q_n$ est un polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$.

**b)** En écrivant $Q_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$, et en utilisant les valeurs de $Q_n(-a)$ et de $Q_n(-c)$, déterminer une expression de $\beta_n$ en fonction de $n, a, b$ et $c$ et en déduire une expression de $Q_n(0)$.

**Réponse :**

**a)** Les coefficients de $C_m - C_1$ sont constants. On conclut par linéarité par rapport à la première colonne.

**b)** $Q_n(-a) = (b-a)^n$ et $Q_n(-c) = (b-c)^n$ donc $\alpha_n$ et $\beta_n$ vérifient le système $\begin{cases} -\alpha_n a + \beta_n = (b-a)^n \\ -\alpha_n c + \beta_n = (b-c)^n \end{cases}$.

On trouve $\alpha_n = \dfrac{(b-c)^n - (b-a)^n}{a-c}$ et $\beta_n = \dfrac{a(b-c)^n - c(b-a)^n}{a-c}$

donc $\boxed{Q_n(0) = \beta_n = \dfrac{a(b-c)^n - c(b-a)^n}{a-c}}$.

* **8** **Déterminants de Vandermonde**

On considère $n$ nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), et pour $p \in \{2, \ldots n\}$, on pose :

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & a_p^{p-1} \end{vmatrix} \text{ et } P_{p-1}(X) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & X \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{p-1}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \cdots & a_{p-1}^{p-1} & X^{p-1} \end{vmatrix}.$$

On pose par ailleurs $V(a_1) = 1$, et $P_1(X) = X - a_1$.

**a)** S'il existe un couple d'entiers $(i,j)$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $a_i = a_j$, montrer que $V(a_1, \cdots, a_p) = 0$.

Si les $a_i$ sont distincts, montrer que $P_{p-1}(X)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, de racines $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ et de coefficient dominant $V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$.

En déduire que *dans tous les cas* $V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = (a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_{p-1})V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$.

**b)** Montrer que $V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

**c)** Calculer les déterminants $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3)$ : $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$

**Réponse :**

**a)** Supposons qu'il existe un couple d'entiers $(i,j)$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $a_i = a_j$, alors les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes sont égales, donc $V(a_1,\cdots,a_p) = 0$.

Si les $a_i$ sont distincts, alors $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ sont $p-1$ racines distinctes du polynôme $P_{p-1} \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Par développement par rapport à la dernière colonne, on constate que le terme dominant de $P_{p-1}(X)$ est $V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$.

Un théorème sur les polynômes (unicité si le polynôme est scindé à racines simples et à coefficient dominant donné) permet de montrer que $P_{p-1}(X) = V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \prod_{k=1}^{p-1} (X - a_k)$.

Si les $(a_k)$ sont distincts, l'égalité $\boxed{V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = (a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_{p-1})V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})}$ est obtenue en prenant $X = a_p$.

Dans les cas contraire, $V(a_1, a_2, \cdots, a_p) = 0$ et l'un des facteurs $(a_p - a_1)(a_p - a_2)\ldots(a_p - a_{p-1})$ ou $V(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$ est nul, donc la formule reste vraie.

**b)** On peut alors montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{H}_n$ : $\boxed{V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$

$\mathscr{H}_2 : V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ est facile à montrer (on peut également convenir que $V(a_1) = 1 = \prod_{\emptyset} (a_j - a_i)$).

Le passage de $\mathscr{H}_n$ à $\mathscr{H}_{n+1}$ (hérédité) est une conséquence de la propriété vérifiée dans la question précédente.

**c)** On vérifie que $\cos(2x) = 5 = 2\cos^2 x - 1$. Par des opérations de pivot de Gauss sur les colonnes ($C_3 \leftarrow C_3 + C_1$, puis mise en facteur de 2 sur $C_3$) on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix} = V(\cos a, \cos b, \cos c)$$

$$= (\cos c - \cos b)(\cos c - \cos a)(\cos b - \cos a).$$

Par mise en facteur de $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ respectivement dans la première, deuxième, troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix} = V(a^2, b^2, c^2) = (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a)(c+a)(c+b)(b+a).$$