PT **Exercices sur l'algèbre linéaire** **2024/2025**

feuille N° 1

☞ **1** Soit $m \in \mathbb{R}$, et les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^6$:
$u_1 = (-1,1,1,1,0,0)$; $u_2 = (-1,1,2,1,1,-2)$; $u_3 = (2,-2,-1,-2,1,m)$; $u_4 = (1,-1,1,-1,2,m-2)$ et
$u_5 = (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$.
On considère les matrices M_4 dont les lignes sont u_1,u_2,u_3,u_4, et M_5 dont les lignes sont u_1,u_2,u_3,u_4,u_5.

a) Effectuer un pivot de Gauss sur les lignes de M_4, et en déduire le rang du système (u_1,u_2,u_3,u_4).

Dans cette question comme dans les suivantes, on distinguera deux cas suivant la valeur de m.

b) Effectuer un pivot de Gauss sur les colonnes de M_5, et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 pour que $u_5 \in \mathrm{Vect}\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right)$.

c) Déterminer les relations linéaires entre les vecteurs (u_1,u_2,u_3,u_4).

d) Déterminer une base du noyau et de l'image de M_4 et de ${M_4}^{\top}$.

e) Résoudre le système d'équations suivant, d'inconnues (x,y,z,t), en distinguant suivant les paramètres m et a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -x-y+2z+t & = & a_1 \\ x+y-2z-t & = & a_2 \\ x+2y-z+t & = & a_3 \\ x+y-2z-t & = & a_4 \\ y+z+2t & = & a_5 \\ -2y+mz+(m-2)t & = & a_6 \end{array}\right.$$

——————— • ———————

☞ **2** Soit les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$: $F = \mathrm{Vect}\,\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,\{(1,-1,0),(1,0,-2)\}$.

a) Justifier, sans calculs, que $F \cap G \neq \{(0,0,0)\}$.

b) Déterminer $F \cap G$.

c) Trouver un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F, puis un supplémentaire G' de $F \cap G$ dans G.

——————— • ———————

∗ **3** On note f l'application qui à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D(X) = X^4+X^3+X^2+X+1$.

a) Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

b) Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

——————— • ———————

∗ **4** On note respectivement u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à $P(X)$, associent respectivement $P(X+1)$ et $P(X-1)$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, étudier le rang de $u + k\,v$.

——————— • ———————

∗ **5** Soit $n \in \mathbb{N}$, et les applications de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par

$$\Phi(P) = P(X+1)\,; \qquad \Psi(P) = P(X-1)\,; \qquad \Theta(P) = P(1-X).$$

$\Phi(P)$ est le polynôme obtenu en effectuant dans $P(X)$ la substitution $X \to X+1$; ainsi $\Phi(1) = 1$ et $\Phi(X^2) = X^2+2X+1$.

a) Montrer que Φ, Ψ et Θ définissent des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que Φ, Ψ et Θ sont bijectifs en précisant leurs inverses.

c) Déterminer les matrices respectives F, S et T de Φ, Ψ et Θ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, en précisant leurs inverses.

d) Montrer que $\left((X-\frac{1}{2})^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et préciser la matrice de Θ dans cette base.
En déduire que T est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent ± 1.

e) Trouver deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par Θ.

∗ **6** Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, on considère l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i \\ \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$$

Montrer que Φ est linéaire et surjective.
Montrer qu'elle est injective si, et seulement si, la somme des E_i est directe.

∗ **7** Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M^\top = M\right\}$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles *antisymétriques* : $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M^\top = -M\right\}$.
On rappelle qu'une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est formée des matrices élémentaires $E_{i,j}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$: tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, à l'exception du coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1.

a) Justifier que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) À l'aide de la décomposition $M = \frac{1}{2}\left(M + M^\top\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right)$, montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

c) Déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ à l'aide des matrices élémentaires $E_{i,j}$. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$? Celle de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$?

d) Caractériser les matrices de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, et celles de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ par leurs coefficients.

e) Le produit de deux matrices symétriques est-il toujours symétrique ?
(Considérer $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)

∗ **8** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A.B$ et $B.A$. Que constate-t-on ?
On appelle ***diviseurs de zéro*** deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles dont les produits $A.B$ et $B.A$ sont nuls.

b) Soit A et B deux matrices, et α et β les endomorphismes canoniquement associés. Montrer que A et B sont des diviseurs de zéro si et seulement si $\{0\} \neq \operatorname{Im}(\beta) \subset \operatorname{Ker}(\alpha)$ et $\{0\} \neq \operatorname{Im}(\alpha) \subset \operatorname{Ker}(\beta)$.

c) Si $n = 2$, quel est le rang des diviseurs de zéro ?

d) Toujours si $n = 2$, montrer que les diviseurs de zéro sont nécessairement de la forme
$A = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & \mu a' \\ b' & \mu b' \end{pmatrix}$, où $(a, b, a', b', \lambda, \mu)$ sont des scalaires qui vérifient une condition nécessaire et suffisante à préciser.

∗ **9** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = (X^2 + X)P(1) + (X^2 - X)P(-1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

∗∗ **10** Montrer que si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, vérifiant $u^2 = -\operatorname{id}_E$, alors n est pair. Indication : utiliser le déterminant.

Si $n = 2$, montrer qu'il existe une base $(x_1, u(x_1))$ de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $n = 4$, montrer qu'il existe une base $(x_1, x_2, u(x_1), u(x_2))$ de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$.

∗∗ **11** On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^3 + X^2 - X - 1$.

a) Calculer $P(A)$ et $P(I_3)$.

b) Factoriser P et montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $X^n = P(X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$.
On déterminera a_n, b_n et c_n.

c) En déduire A^n.