PT **DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 4** **18/01/2025**

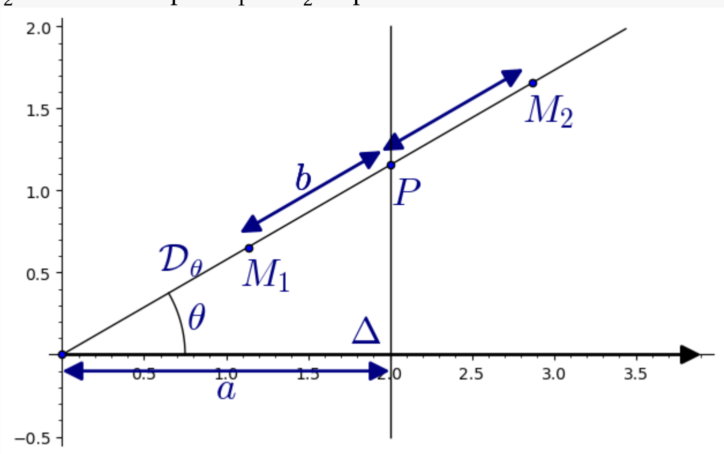
Ce devoir se compose de trois parties indépendantes — Calculatrices interdites

Partie A

Soit a et b deux réels strictement positifs, et θ un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Dans le plan affine euclidien usuel, muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère

* la droite Δ d'équation $x = a$;
* la droite $\mathscr{D}_\theta$ d'équation $y = x\tan\theta$
* le point P à l'intersection de Δ et de $\mathscr{D}_\theta$;
* les points M_1 et M_2 situés sur $\mathscr{D}_\theta$, tels que $M_1P = M_2P = b$, respectivement à gauche et à droite de $\mathscr{D}_\theta$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont décrites par M_1 et M_2 respectivement.



A1 Déterminer les coordonnées des points P, M_1 et M_2 en fonction de a, b, θ.

A2 Montrer que la courbe $\mathscr{C}$, paramétrée par $\begin{cases} x = a + b\cos(\theta) \\ y = a\tan(\theta) + b\sin(\theta) \end{cases}, \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$, est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.
Quel intervalle doit décrire θ pour parcourir seulement $\mathscr{C}_1$?

A3 Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right) = b^2x^2$.

A4 Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$, et $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$; montrer que $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

A5 Montrer qu'un autre paramétrage de $\mathscr{C}$ est $\begin{cases} x = a + b\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = 2\,t\left(\dfrac{a}{1-t^2} + \dfrac{b}{1+t^2}\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

A6 On considère le paramétrage défini dans la question précédente. Étudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$ lorsque $a = b = 1$ (On étudiera en particulier les branches infinies obtenues en $t = 1$ et $t = \pm\infty$).

Partie B

On se place dans le plan affine euclidien usuel, muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère les vecteurs $\vec{U}_t = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$ et $\vec{V}_t = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}$.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et positive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; on considère la courbe définie par le paramétrage : $t \in I \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{U}_t$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t \end{cases}$

B1 Montrer que $\overrightarrow{M}'(t) = f'(t)\vec{U}_t + f(t)\vec{V}_t$, et calculer $\left\|\overrightarrow{M}'(t)\right\|^2$.
À quelle condition portant sur $f(t_0)$ et $f'(t_0)$, le point $M(t_0)$ est-il singulier?
Que vaut $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$?

On se place maintenant dans le cas où $f(t) = 1 + \cos t$, et on appelle $\mathscr{Q}$ la courbe obtenue.

B2 Quelle(s) symétrie(s) peut-on constater sur $\mathscr{Q}$? Sur quel intervalle peut-on étudier $\mathscr{Q}$?

B3 En utilisant le résultat de la question **1**, montrer que la courbe admet un point singulier.
Déterminer la nature de ce point singulier, ainsi que la tangente en ce point.

B4 Montrer que, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\| = 2\cos\frac{t}{2}$ et en déduire la valeur de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

B5 Déterminer la longueur totale de la courbe $\mathscr{Q}$.
En appellant $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$ la base de Frenet, montrer que $\vec{T} = -\sin\frac{t}{2}\vec{U}_t + \cos\frac{t}{2}\vec{V}_t = \vec{U}_{\frac{3t+\pi}{2}}$.
En déduire $\vec{N}$ d'une part, et l'angle α entre $\vec{\imath}$ et $\vec{T}$ d'autre part.

B6 Déterminer le rayon de courbure R en tout point régulier.

B7 Déterminer les coordonnées du centre de courbure $I(t)$ à $\mathscr{Q}$ au point $M(t)$.

B8 Déterminer un paramétrage de l'enveloppe de la famille de droites $\mathscr{D}_t : \left(M(t); \vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}\right)$.
Comment retrouver ainsi le résultat de **B7** ?

Partie C

On considère la suite de complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Ré}(z_0) > 0$, et la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

C1 Montrer que la suite des modules $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Cette suite converge-t-elle ?

C2 On écrit z_n sous la forme trigonométrique $z_n = r_n \mathrm{e}^{i\theta_n}$, où $r_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
Montrer que $z_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}$; en déduire que $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$, et que $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$.

C3 Déduire de la question précédente :

- une expression de θ_n en fonction de θ_0 et de n ;
- l'égalité $r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta_0}{2^k}$.

C4 Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n}$.

C5 Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En utilisant la relation $\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}$, montrer que pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \ln\sin\theta_0 - \ln\sin\frac{\theta_0}{2^N} - N\ln 2$.

C6 Déduire de la question précédente :

- la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n}$ en fonction de θ_0 ;
- la valeur de la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$, en fonction de θ_0 et r_0.

C7 Montrer que la suite (z_n) tend vers une limite que l'on précisera.

C8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = |z_n - z_{n+1}|$. Exprimer d_n en fonction de r_n et θ_n, et montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} d_n$ converge (on ne demande pas la valeur de la somme).