PT   CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 4   18/01/2025

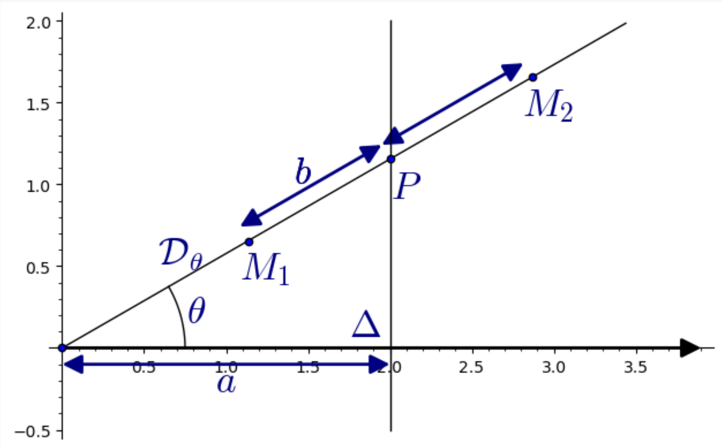
Ce devoir se compose de trois parties indépendantes — Calculatrices interdites

Partie A

Soit a et b deux réels strictement positifs, et θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Dans le plan affine euclidien usuel, muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère

* la droite Δ d'équation $x=a$;
* la droite $\mathscr{D}_\theta$ d'équation $y=x\tan\theta$
* le point P à l'intersection de Δ et de $\mathscr{D}_\theta$;
* les points M_1 et M_2 situés sur $\mathscr{D}_\theta$, tels que $M_1P=M_2P=b$, respectivement à gauche et à droite de $\mathscr{D}_\theta$.

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont décrites par M_1 et M_2 respectivement.



A1 *Déterminer les coordonnées des points P, M_1 et M_2 en fonction de a, b, θ.*

Le point P a pour abscisse $x_P=a$ et pour ordonnée $y_P=a\tan\theta$.
Le vecteur $\overrightarrow{PM_2}$ a pour norme b, et pour composantes $(b\cos\theta, b\sin\theta)$ et $\overrightarrow{PM_2}=-\overrightarrow{PM_1}$, donc $\boxed{P:(a,a\tan\theta)}$, $\boxed{M_1:(a-b\cos\theta, a\tan\theta-b\sin\theta)}$ et $\boxed{M_2:(a+b\cos\theta, a\tan\theta+b\sin\theta)}$.

A2 *Montrer que la courbe $\mathscr{C}$, paramétrée par $\begin{cases} x=a+b\cos(\theta)\\ y=a\tan(\theta)+b\sin(\theta)\end{cases}$, $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, est la réunion de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.*
Quel intervalle doit décrire θ pour parcourir seulement $\mathscr{C}_1$?

En appelant $M(\theta)$ le point de coordonnées $(a+b\cos\theta, a\tan\theta+b\sin\theta)$, on remarque que $M(\theta)=M_1(\theta)$ et $M(\theta+\pi)=(a-b\cos\theta, a\tan\theta-b\sin\theta)=M_2(\theta)$. Lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $M(\theta)$ décrit $\mathscr{C}_2$; $\boxed{\text{lorsque } \theta \text{ décrit } \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[, M(\theta) \text{ décrit } \mathscr{C}_1}$.

A3 *Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right)=b^2x^2$.*

Avec $(x=a+b\cos\theta, y=a\tan\theta+b\sin\theta)$, on obtient

$$x^2+y^2=a^2+2a\,b\cos\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\tan^2\theta+2a\,b\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+b^2\sin^2\theta$$

$=a^2(1+\tan^2\theta)+2\frac{a\,b}{\cos\theta}+b^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+2\frac{a\,b}{\cos\theta}+b^2=\left(\frac{a}{\cos\theta}+b\right)^2$, et $(x-a)^2=b^2\cos^2\theta$,
donc $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right)=b^2(a+b\cos\theta)^2=b^2x^2$; $\boxed{\text{une équation cartésienne de } \mathscr{C} \text{ est } (x-a)^2\left(x^2+y^2\right)=b^2x^2}$.

A4 *Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$, et $t=\tan\frac{\theta}{2}$; montrer que $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$.*

Posons pour plus de commodité $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$, alors $t = \tan\alpha$, donc $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, et alors $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, et $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; ainsi $\cos\theta = \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1$, donc $\boxed{\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$;

$\sin\theta = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ donc $\boxed{\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}}$.

A5 *Montrer qu'un autre paramétrage de $\mathscr{C}$ est* $\begin{cases} x = a + b\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = 2\,t\left(\dfrac{a}{1-t^2} + \dfrac{b}{1+t^2}\right)\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

En utilisant les résultats de la question précédente, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

On trouve alors $\boxed{x = a + b\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ et $\boxed{y = 2\,t\left(\dfrac{a}{1-t^2} + \dfrac{b}{1+t^2}\right)}$.

A6 *On considère le paramétrage défini dans la question précédente. Étudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$ lorsque $a = b = 1$ (On étudiera en particulier les branches infinies obtenues en $t = 1$ et $t = \pm\infty$).*

Avec $a = b = 1$, on obtient le paramétrage : $x(t) = 1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{1+t^2}$, et

$y(t) = 2t\left(\dfrac{1}{1-t^2} + \dfrac{1}{1+t^2}\right) = \dfrac{4t}{1-t^4}$.

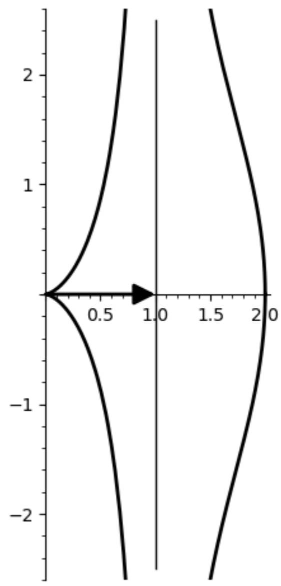
x est pair et y impair ; on retrouve que la courbe est symétrique par rapport à O_x, et que l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}_+$.

Par dérivation,

$x'(t) = \dfrac{2(-2t)}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{4}{(1-t^4)^2}(1-t^4 - t(-4t^3)) = 4\dfrac{1+3t^4}{(1-t^4)^2}$.

On en déduit le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	2	$-$		$-$	
$y'(t)$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$x(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \|\| -\infty$	$\nearrow$	0



On reconnaît une asymptote verticale $x = 1$ quand $t \to 1$.

Quand $t \to +\infty$, on a affaire à un point asymptote O ; comme

$\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{4t}{1-t^4}\,\dfrac{1+t^2}{2} = \dfrac{2t}{1-t^2} \to 0$, la tangente à en ce point O est horizontale.

En tenant compte de la symétrie par rapport à O_x,

$\boxed{M(\infty) = O \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$.

Partie B

On se place dans le plan affine euclidien usuel, muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère les vecteurs $\vec{U}_t = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$ et $\vec{V}_t = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}$.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et positive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$; on considère la courbe définie par le paramétrage : $t \in I \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{U}_t$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t\end{cases}$

B1 *Montrer que $\overrightarrow{M'}(t) = f'(t)\vec{U}_t + f(t)\vec{V}_t$, et calculer $\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|^2$.*

À quelle condition portant sur $f(t_0)$ et $f'(t_0)$, le point $M(t_0)$ est-il singulier ?

Que vaut $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$?

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{U}_t}{\mathrm{d}=}-\sin t\vec{\imath}+\cos t\vec{\jmath}=\vec{V}_t$; la formule $\boxed{\overrightarrow{M'}(t)=f'(t)\vec{U}_t+f(t)\vec{V}_t}$ s'en déduit par dérivation d'un produit.
On peut remarquer que $\left(\vec{U}_t,\vec{V}_t\right)$ est une base orthonormée ; $\left\|\vec{U}_t\right\|=\left\|\vec{V}_t\right\|=1$ et $\vec{U}_t\cdot\vec{V}_t=0$, et par conséquent $\boxed{\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|^2=(f'(t)')^2+(f(t))^2}$.

Le point $M(t_0)$ est singulier si, et seulement si $\overrightarrow{M'}(t_0)=\vec{0}$, donc si $\boxed{f(t_0)=f'(t_0)=0}$.

Enfin $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{(f'(t)')^2+(f(t))^2}}$.

On se place maintenant dans le cas où $f(t)=1+\cos t$, et on appelle $\mathcal{Q}$ la courbe obtenue.

B2 *Quelle(s) symétrie(s) peut-on constater sur $\mathcal{Q}$? Sur quel intervalle peut-on étudier $\mathcal{Q}$?*

x et y sont 2π-périodiques, donc la courbe peut être étudiée pour $t\in[-\pi,\pi]$.
$x(-t)=f(-t)\cos -t=x(t)$, et $y(-t)=f(-t)\sin(-t)=f(t)\sin t=-y(t)$, donc la courbe $\mathcal{Q}$ est symétrique par rapport à l'axe O_x, et elle peut être étudiée pour $\boxed{t\in[0,\pi]}$.

B3 *En utilisant le résultat de la question $\boxed{1}$, montrer que la courbe admet un point singulier. Déterminer la nature de ce point singulier, ainsi que la tangente en ce point.*

D'après la question $\boxed{1}$, $M(t_0)$ est singulier si, et seulement si, $f(t_0)=f'(t_0)=0$, en l'occurrence $1+\cos t_0=\sin t_0=0$, c'est-à-dire $t_0=\pi$.

Posons $t=\pi-h$, alors $x(t)=(1+\cos t)\cos t=-(1-\cos h)\cos h=-\dfrac{h^2}{2}\left(1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^3)\right)=-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^4}{4}+o(h^5)$, et $y(t)=(1+\cos t)\cos t=-(1-\cos h)\sin h=-\dfrac{h^2}{2}\left(h+o(h^3)\right)=-\dfrac{h^3}{3}+o(h^5)$, et alors
$\overrightarrow{OM}(t)=-\dfrac{h^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\dfrac{h^3}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\vec{o}(h^3)$.

Il en résulte que $\boxed{M(\pi)\text{ est un point de rebroussement de première espèce, à tangente horizontale}}$.

B4 *Montrer que, pour $t\in[-\pi,\pi]$, $\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|=2\cos\dfrac{t}{2}$ et en déduire la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.*

$\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|^2=(1+\cos t)^2+\sin^2 t=1+2\cos t+1=2+2\cos t=4\cos^2\dfrac{t}{2}$; or $\dfrac{\cos t}{2}>0$ pour $t\in]-\pi,\pi[$, donc $\boxed{\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2\cos\dfrac{t}{2}}$.

B5 *Déterminer la longueur totale de la courbe $\mathcal{Q}$.*
En appellant $\left(\vec{T},\vec{N}\right)$ la base de Frenet, montrer que $\vec{T}=-\sin\dfrac{t}{2}\vec{U}_t+\cos\dfrac{t}{2}\vec{V}_t=\vec{U}_{\frac{3t+\pi}{2}}$.
En déduire $\vec{N}$ d'une part, et l'angle α entre $\vec{\imath}$ et $\vec{T}$ d'autre part.

La longueur totale de le courbe $\mathcal{Q}$ est $\ell=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}2\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}4(1-(-1))$ donc $\boxed{\ell=8}$.

$\vec{M}(t)=(1+\cos(t))\vec{U}_t$ donc $\overrightarrow{M'}(t)=-\sin t\vec{U}_t+(1+\cos(t))\vec{V}_t=-2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}\vec{U}_t+2\cos^2\dfrac{t}{2}\vec{V}_t=2\cos\dfrac{t}{2}\left(\sin\dfrac{t}{2}\vec{U}_t+\cos\dfrac{t}{2}\vec{V}_t\right)$, donc $\vec{T}=-\sin\dfrac{t}{2}\vec{U}_t+\cos\dfrac{t}{2}\vec{V}_t=\left(-\sin\dfrac{t}{2}\cos t-\sin t\cos\dfrac{t}{2}\right)\vec{\imath}+\left(\cos\dfrac{t}{2}\cos t-\sin\dfrac{t}{2}\sin t\right)\vec{\jmath}=-\sin\dfrac{3t}{2}\vec{\imath}+\cos\dfrac{3t}{2}\vec{\jmath}=\cos\dfrac{3t+\pi}{2}\vec{\imath}+\sin\dfrac{3t+\pi}{2}\vec{\jmath}$ et finalement
$\boxed{\vec{T}=\vec{U}_{\frac{3t+\pi}{2}}}$. On en déduit d'une part que $\boxed{\vec{N}=\vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}}$ et d'autre part que $\boxed{\alpha=\dfrac{3t+\pi}{2}}$.

B6 *Déterminer le rayon de courbure R en tout point régulier.*

En utilisant la formule $R=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$, on obtient $\boxed{R=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}=\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{t}{2}}$.

B7 *Déterminer les coordonnées du centre de courbure $I(t)$ à $\mathcal{Q}$ au point $M(t)$.*

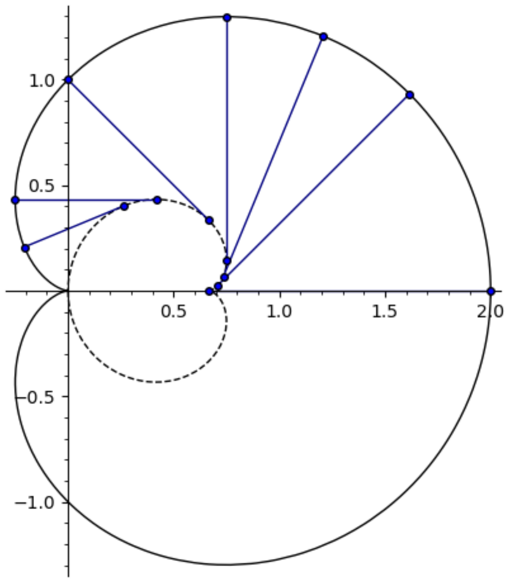
On sait que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N}$, c'est-à-dire que les cordonnées de $I(t)$ sont :

$$\begin{pmatrix} \cos t + \cos^2 t \\ \sin t + \sin t \cos t \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cos\frac{t}{2} \begin{pmatrix} -\sin\frac{3t}{2} \\ \cos\frac{3t}{2} \end{pmatrix} \text{; mais}$$

$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ et $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$, donc
$2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2} = \sin(2t) + \sin t$, et $2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2} = \cos(2t) + \cos t$.
Les coordonnées de $M(t)$ sont $\left(\cos t + \cos^2 t - \frac{2}{3}(\cos(2t) + \cos t), \sin t + \sin t \cos t + \frac{2}{3}(\sin(2t) + \sin t)\right)$.

B8 *Déterminer un paramétrage de l'enveloppe de la famille de droites $\mathcal{D}_t$: $\left(M(t); \vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}\right)$.*
Comment retrouver ainsi le résultat de $\boxed{B7}$?

Soit A le point courant de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t$, alors $A = M + \lambda\vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}$, avec $\det\left(A', V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = 0$; mais $A' = M' + \lambda\vec{V}'_{\frac{3t+\pi}{2}} + \lambda'\vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}$, donc $\det\left(A', V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = \det\left(M'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) + \lambda\det\left(V'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right)$ qui vaut 0. Mais $\left(V'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = -1$ et donc $\lambda = \det\left(M'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) 2\cos\frac{t}{2} \det\left(U_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = 2\cos\frac{t}{2} = R$.
On calcule ainsi l'enveloppe des normales de $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{la développée de } \mathcal{Q}}$. La fin du calcul est identique à celui de la question précédente.



Partie C

On considère la suite de complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\text{Ré}(z_0) > 0$, et la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

C1 *Montrer que la suite des modules $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Cette suite converge-t-elle ?*

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient $|z_{n+1}| = \frac{1}{2}|z_n + |z_n|| \leqslant \frac{1}{2}(|z_n| + |z_n|) = |z_n|$, donc $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante; elle est de plus positive, donc minorée par 0.
Alors $\boxed{\text{la suite } (|z_n|) \text{ converge}}$.

C2 *On écrit z_n sous la forme trigonométrique $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, où $r_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.*
Montrer que $z_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$; en déduire que $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$, et que $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$.

$z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \dfrac{r_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}\right) = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$, mais $\cos\dfrac{\theta_n}{2} > 0$, donc par identification des modules et des arguments : $\boxed{r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}}$, et $\boxed{\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}}$.

C3 *Déduire de la question précédente :*

* *une expression de θ_n en fonction de θ_0 et de n ;*
* *l'égalité $r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\theta_0}{2^k}$.*

* (θ_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}}$;
* À partir de $r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$, on obtient par récurrence ou par télescopage $r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k$, donc finalement : $\boxed{r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\theta_0}{2^k}}$.

C4 *Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n}$.*

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{\theta_0}{2^n} \to 0$; mais $\ln\cos u = \ln\left(1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = -\dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $\ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\theta_0^2}{4^n}$.

Mais la série géométrique $\sum -\dfrac{\theta_0^2}{4^n}$ converge, donc la série à termes négatifs $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} \text{ converge}}$.

C5 *Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En utilisant la relation $\cos\alpha = \dfrac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}$, montrer que pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\sin\theta_0 - \ln\sin\dfrac{\theta_0}{2^N} - N\ln 2$.*

En passant au logarithme : $\ln\cos\alpha = \ln\sin(2\alpha) - \ln\sin(\alpha) - \ln 2$; avec $\alpha = \dfrac{\theta_0}{2^n} = \theta_n$, $2\alpha = \dfrac{2\theta_0}{2^n} = \theta_{n-1}$, donc $\ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\theta_{n-1} - \ln\theta_n - \ln 2$.

Par télescopage, $\sum_{n=1}^{N} \ln\theta_{n-1} - \ln\theta_n = \ln\theta_0 - \ln\theta_N$ donc

$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\sin\theta_0 - \ln\sin\dfrac{\theta_0}{2^N} - N\ln 2}$.

C6 *Déduire de la question précédente :*

* *la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n}$ en fonction de θ_0 ;*
* *la valeur de la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$, en fonction de θ_0 et r_0.*

* La question précédente donne $\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\dfrac{\sin\theta_0}{2^N \sin\frac{\theta_0}{2^N}}$ mais $\sin\dfrac{\theta_0}{2^N} \sim \dfrac{\theta_0}{2^N}$, donc $2^N \sin\dfrac{\theta_0}{2^N} \to \theta_0$, et alors par passage à la limite : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.
* En passant le résultat précédent à l'exponentielle, on trouve $\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$, donc $\boxed{\lim r_n = r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.

C7 Le module et l'argument de z_n ont une limite finie déterminée ci-dessus, donc $\lim z_n = \lim\left(r_n e^{i\theta_n}\right) = \lim r_n e^{i\lim(\theta_n)} = \lim r_n$ et alors $\boxed{\lim z_n = r_0 \dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$

C8 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = |z_n - z_{n+1}|$. Exprimer d_n en fonction de r_n et θ_n, et montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} d_n$ converge (on ne demande pas la valeur de la somme).*

$z_n - z_{n+1} = z_n - \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{z_n - |z_n|}{2} = \dfrac{1}{2}\left(r_n e^{i\theta_n} - r_n\right) = \dfrac{r_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_n}{2}} - e^{-i\frac{\theta_n}{2}}\right) = r_n i \sin\dfrac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$, donc $d_n = r_n \sin\dfrac{\theta_n}{2}$.

Or $0 \leqslant r_n \leqslant r_0$, donc $d_n \leqslant \sin\dfrac{\theta_n}{2} \leqslant \dfrac{\theta_n}{2} = \dfrac{\theta_0}{2^{n+1}}$, donc par comparaison avec une suite géométrique, la suite à termes positifs $\boxed{\sum d_n \text{ converge}}$.