PT CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 4 18/01/2025

Partie A

A1 Le point P a pour abscisse $x_P = a$ et pour ordonnée $y_P = a\tan\theta$.
Le vecteur $\overrightarrow{PM_2}$ a pour norme b, et pour composantes $(b\cos\theta, b\sin\theta)$ et $\overrightarrow{PM_2} = -\overrightarrow{PM_1}$, donc $\boxed{P:(a, a\tan\theta)}$, $\boxed{M_1:(a-b\cos\theta, a\tan\theta - b\sin\theta)}$ et $\boxed{M_2:(a+b\cos\theta, a\tan\theta + b\sin\theta)}$.

A2 En appelant $M(\theta)$ le point de coordonnées $(a+b\cos\theta, a\tan\theta+b\sin\theta)$, on remarque que $M(\theta) = M_1(\theta)$ et $M(\theta+\pi) = (a-b\cos\theta, a\tan\theta-b\sin\theta) = M_2(\theta)$. Lorsque θ décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $M(\theta)$ décrit $\mathscr{C}_2$; $\boxed{\text{lorsque } \theta \text{ décrit } \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[, M(\theta) \text{ décrit } \mathscr{C}_1}$.

A3 Avec $(x = a+b\cos\theta, y = a\tan\theta + b\sin\theta)$, on obtient

$$x^2+y^2 = a^2+2a\,b\cos\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\tan^2\theta+2a\,b\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+b^2\sin^2\theta$$

$$= a^2(1+\tan^2\theta)+2\frac{a\,b}{\cos\theta}+b^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = \frac{a^2}{\cos^2\theta}+2\frac{a\,b}{\cos\theta}+b^2 = \left(\frac{a}{\cos\theta}+b\right)^2,$$ et $(x-a)^2 = b^2\cos^2\theta$,

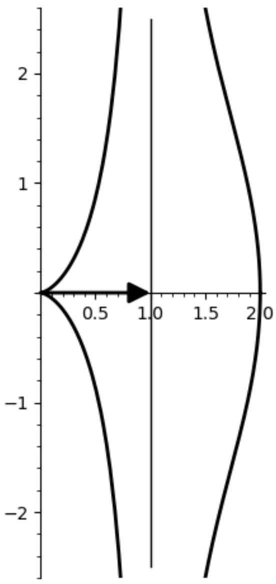
donc $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right) = b^2(a+b\cos\theta)^2 = b^2x^2$; $\boxed{\text{une équation cartésienne de } \mathscr{C} \text{ est } (x-a)^2\left(x^2+y^2\right) = b^2x^2}$.

A4 Posons pour plus de commodité $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$, alors $t = \tan\alpha$, donc $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, et alors $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, et $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; ainsi $\cos\theta = \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{2}{1+t^2}-1$, donc $\boxed{\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$; $\sin\theta = \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ donc $\boxed{\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}}$.

A5 En utilisant les résultats de la question précédente, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

On trouve alors $\boxed{x = a+b\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ et $\boxed{y = 2\,t\left(\dfrac{a}{1-t^2}+\dfrac{b}{1+t^2}\right)}$.

Avec $a = b = 1$, on obtient le paramétrage : $x(t) = 1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{1+t^2}$, et
$y(t) = 2t\left(\dfrac{1}{1-t^2}+\dfrac{1}{1+t^2}\right) = \dfrac{4t}{1-t^4}$.
x est pair et y impair ; on retrouve que la courbe est symétrique par rapport à O_x, et que l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}_+$.
Par dérivation,
$x'(t) = \dfrac{2(-2t)}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{4}{(1-t^4)^2}(1-t^4-t(-4t^3)) = 4\dfrac{1+3t^4}{(1-t^4)^2}$.



A6 On en déduit le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	2	$-$		$-$	
$y'(t)$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$x(t)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty\|\|-\infty$	$\nearrow$	0

On reconnaît une asymptote verticale $x = 1$ quand $t \to 1$.
Quand $t \to +\infty$, on a affaire à un point asymptote O ; comme
$\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{4t}{1-t^4}\dfrac{1+t^2}{2} = \dfrac{2t}{1-t^2} \to 0$, la tangente à en ce point O est horizontale.
En tenant compte de la symétrie par rapport à O_x,
$\boxed{M(\infty) = O \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$.

Partie B

B1 $\dfrac{d\vec{U}_t}{d=} - \sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath} = \vec{V}_t$; la formule $\boxed{\overrightarrow{M'}(t) = f'(t)\vec{U}_t + f(t)\vec{V}_t}$ s'en déduit par dérivation d'un produit.
On peut remarquer que $\left(\vec{U}_t, \vec{V}_t\right)$ est une base orthonormée ; $\left\|\vec{U}_t\right\| = \left\|\vec{V}_t\right\| = 1$ et $\vec{U}_t \cdot \vec{V}_t = 0$, et par conséquent $\boxed{\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|^2 = (f'(t)')^2 + (f(t))^2}$.
Le point $M(t_0)$ est singulier si, et seulement si $\overrightarrow{M'}(t_0) = \vec{0}$, donc si $\boxed{f(t_0) = f'(t_0) = 0}$.
Enfin $\boxed{\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(f'(t)')^2 + (f(t))^2}}$.

B2 x et y sont 2π-périodiques, donc la courbe peut être étudiée pour $t \in [-\pi, \pi]$.
$x(-t) = f(-t)\cos -t = x(t)$, et $y(-t) = f(-t)\sin(-t) = f(t)\sin t = -y(t)$, donc la courbe $\mathcal{Q}$ est symétrique par rapport à l'axe O_x, et elle peut être étudiée pour $\boxed{t \in [0, \pi]}$.

B3 D'après la question $\boxed{1}$, $M(t_0)$ est singulier si, et seulement si, $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, en l'occurrence $1 + \cos t_0 = \sin t_0 = 0$, c'est-à-dire $t_0 = \pi$.
Posons $t = \pi - h$, alors $x(t) = (1+\cos t)\cos t = -(1-\cos h)\cos h = -\dfrac{h^2}{2}\left(1 - \dfrac{h^2}{2} + o(h^3)\right) = -\dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^4}{4} + o(h^5)$, et $y(t) = (1+\cos t)\cos t = -(1-\cos h)\sin h = -\dfrac{h^2}{2}\left(h + o(h^3)\right) = -\dfrac{h^3}{3} + o(h^5)$, et alors
$\overrightarrow{OM}(t) = -\dfrac{h^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{h^3}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \vec{o}(h^3)$.
Il en résulte que $\boxed{M(\pi) \text{ est un point de rebroussement de première espèce, à tangente horizontale}}$.

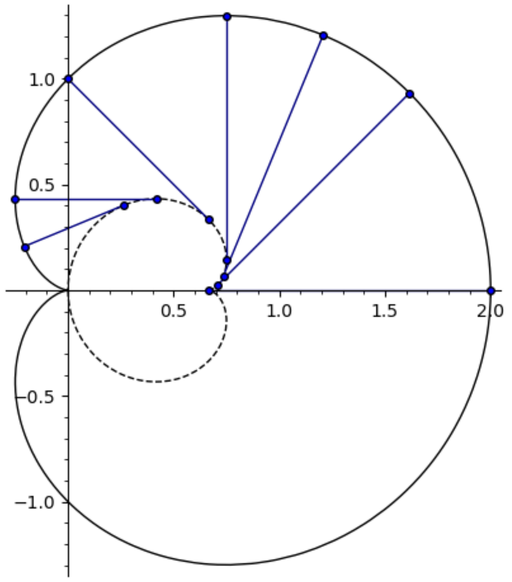
B4 $\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\|^2 = (1+\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 + 2\cos t + 1 = 2 + 2\cos t = 4\cos^2 \dfrac{t}{2}$; or $\dfrac{\cos t}{2} > 0$ pour $t \in]-\pi, \pi[$, donc $\boxed{\left\|\overrightarrow{M'}(t)\right\| = \dfrac{ds}{dt} = 2\cos\dfrac{t}{2}}$.

B5 La longueur totale de le courbe $\mathcal{Q}$ est $\ell = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{t}{2}dt = \left[4\sin\frac{t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} 4(1-(-1))$ donc $\boxed{\ell = 8}$.
$\vec{M}(t) = (1+\cos(t))\vec{U}_t$ donc $\overrightarrow{M'}(t) = -\sin t\vec{U}_t + (1+\cos(t))\vec{V}_t = -2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}\vec{U}_t + 2\cos^2\dfrac{t}{2}\vec{V}_t = 2\cos\dfrac{t}{2}\left(\sin\dfrac{t}{2}\vec{U}_t + \cos\dfrac{t}{2}\vec{V}_t\right)$, donc $\vec{T} = -\sin\dfrac{t}{2}\vec{U}_t + \cos\dfrac{t}{2}\vec{V}_t = \left(-\sin\dfrac{t}{2}\cos t - \sin t\cos\dfrac{t}{2}\right)\vec{\imath} + \left(\cos\dfrac{t}{2}\cos t - \sin\dfrac{t}{2}\sin t\right)\vec{\jmath} = -\sin\dfrac{3t}{2}\vec{\imath} + \cos\dfrac{3t}{2}\vec{\jmath} = \cos\dfrac{3t+\pi}{2}\vec{\imath} + \sin\dfrac{3t+\pi}{2}\vec{\jmath}$ et finalement
$\boxed{\vec{T} = \vec{U}_{\frac{3t+\pi}{2}}}$. On en déduit d'une part que $\boxed{\vec{N} = \vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}}$ et d'autre part que $\boxed{\alpha = \dfrac{3t+\pi}{2}}$.

B6 En utilisant la formule $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$, on obtient $\boxed{R = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{d\alpha} = \dfrac{4}{3}\cos\dfrac{t}{2}}$.

B7 On sait que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N}$, c'est-à-dire que les cordonnées de $I(t)$ sont :
$\begin{pmatrix}\cos t + \cos^2 t\\ \sin t + \sin t\cos t\end{pmatrix} + \dfrac{4}{3}\cos\dfrac{t}{2}\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{3t}{2}\\ \cos\dfrac{3t}{2}\end{pmatrix}$; mais
$\cos a\sin b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ et $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$, donc
$2\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{3t}{2} = \sin(2t) + \sin t$, et $2\cos\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{3t}{2} = \cos(2t) + \cos t$.
Les coordonnées de $M(t)$ sont $\left(\cos t + \cos^2 t - \dfrac{2}{3}(\cos(2t) + \cos t), \sin t + \sin t\cos t + \dfrac{2}{3}(\sin(2t) + \sin t)\right)$.

B8 Soit A le point courant de l'enveloppe des droites $\mathscr{D}_t$, alors $A = M + \lambda \vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}$, avec $\det\left(A', V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = 0$; mais $A' = M' + \lambda \vec{V}'_{\frac{3t+\pi}{2}} + \lambda' \vec{V}_{\frac{3t+\pi}{2}}$, donc $\det\left(A', V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = \det\left(M'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) + \lambda \det\left(V'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right)$ qui vaut 0. Mais $\left(V'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = -1$ et donc $\lambda = \det\left(M'_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) 2\cos\frac{t}{2} \det\left(U_{\frac{3t+\pi}{2}}, V_{\frac{3t+\pi}{2}}\right) = 2\cos\frac{t}{2} = R$.
On calcule ainsi l'enveloppe des normales de $\mathscr{Q}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{la développée de } \mathscr{Q}}$. La fin du calcul est identique à celui de la question précédente.



Partie C

C1 En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient $|z_{n+1}| = \frac{1}{2}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \frac{1}{2}(|z_n| + |z_n|) = |z_n|$, donc $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante; elle est de plus positive, donc minorée par 0.
Alors $\boxed{\text{la suite } (|z_n|) \text{ converge}}$.

C2 $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} = \dfrac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \dfrac{r_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}\right) = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2} e^{i\frac{\theta_n}{2}}$, mais $\cos\dfrac{\theta_n}{2} > 0$, donc par identification des modules et des arguments : $\boxed{r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}}$, et $\boxed{\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}}$.

C3

* (θ_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}}$;
* À partir de $r_{n+1} = r_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$, on obtient par récurrence ou par télescopage $r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k$, donc finalement : $\boxed{r_n = r_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\theta_0}{2^k}}$.

C4 Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{\theta_0}{2^n} \to 0$; mais $\ln\cos u = \ln\left(1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = -\dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $\ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\theta_0^2}{4^n}$.
Mais la série géométrique $\sum -\dfrac{\theta_0^2}{4^n}$ converge, donc la série à termes négatifs $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} \text{ converge}}$.

C5 En passant au logarithme : $\ln\cos\alpha = \ln\sin(2\alpha) - \ln\sin(\alpha) - \ln 2$; avec $\alpha = \dfrac{\theta_0}{2^n} = \theta_n$, $2\alpha = \dfrac{2\theta_0}{2^n} = \theta_{n-1}$, donc $\ln\cos\dfrac{\theta_0}{2^n} = \ln\theta_{n-1} - \ln\theta_n - \ln 2$.
Par télescopage, $\sum_{n=1}^{N} \ln\theta_{n-1} - \ln\theta_n = \ln\theta_0 - \ln\theta_N$ donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \ln\sin\theta_0 - \ln\sin\frac{\theta_0}{2^N} - N\ln 2}.$$

C6 ∗ La question précédente donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \ln\frac{\sin\theta_0}{2^N\sin\frac{\theta_0}{2^N}}$ mais $\sin\dfrac{\theta_0}{2^N} \sim \dfrac{\theta_0}{2^N}$, donc $2^N\sin\dfrac{\theta_0}{2^N} \to \theta_0$, et alors par passage à la limite : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \ln\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.

∗ En passant le résultat précédent à l'exponentielle, on trouve $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\theta_0}{2^n} = \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$, donc $\boxed{\lim r_n = r_0\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.

C7 Le module et l'argument de z_n ont une limite finie déterminée ci-dessus, donc $\lim z_n = \lim\left(r_n \mathrm{e}^{i\theta_n}\right) = \lim r_n \mathrm{e}^{i\lim(\theta_n)} = \lim r_n$ et alors $\boxed{\lim z_n = r_0\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}}$.

C8 $z_n - z_{n+1} = z_n - \dfrac{z_n+|z_n|}{2} = \dfrac{z_n-|z_n|}{2} = \dfrac{1}{2}\left(r_n\mathrm{e}^{i\theta_n} - r_n\right) = \dfrac{r_n}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta_n}{2}}\right) = r_n\, i\sin\dfrac{\theta_n}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}$, donc $d_n = r_n\sin\dfrac{\theta_n}{2}$.

Or $0 \leqslant r_n \leqslant r_0$, donc $d_n \leqslant \sin\dfrac{\theta_n}{2} \leqslant \dfrac{\theta_n}{2} = \dfrac{\theta_0}{2^{n+1}}$, donc par comparaison avec une suite géométrique, la suite à termes positifs $\boxed{\sum d_n \text{ converge}}$.