PT **DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 3** **30/11/2024**

Ce devoir se compose de quatre parties indépendantes — Calculatrices interdites

Partie A

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes à n lignes.
$(0)_n$ désigne la matrice carrée nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et 0_n le vecteur-colonne nul de E_n.
Si $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, alors $\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux α,β,γ.
On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A1 Montrer que $A_2^2 = A_2$.

A2 Soit λ une valeur propre de A_2, déduire de $A_2^2 = A_2$ que $\lambda \in \{0,1\}$.

A3 Diagonaliser A_2.

A4 Donner (sans justification) le rang de A_1 ? Déterminer $\operatorname{Ker}(A_1)$.

A5 Montrer que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1, et préciser la valeur propre associée.

A6 Que vaut $\operatorname{Tr}(A_1)$? Déterminer le spectre de A_1 ; justifier sans autre calcul que A_1 est diagonalisable.

A7 Diagonaliser A_1. Montrer que les vecteurs propres de A_1 sont aussi vecteurs propres de A_2.

A8 Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^{-1}A_1P$ et $D_2 = P^{-1}A_2P$ soient des matrices diagonales.
On précisera les coefficients diagonaux de D_1 et D_2.

A9 Montrer (avec le minimum de calculs) que $A_1.A_2 = A_2.A_1$.

A10 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables, en précisant leur spectre :
$A_2 - A_1$, $A_1.A_2$, $A_1^2 + A_2^2$, $A_1^3 - A_1$ et $A_2^3 - A_2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, et la matrice $M = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$.
On appelle (U_1,U_2,U_3) une base de vecteurs propres de A ($U_k \in E_3$), et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ les valeurs propres associées : *ie* pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, $A.U_k = \lambda_k U_k$.

A11 Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, montrer que $V_k = \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} \in E_6$ et $W_k = \begin{pmatrix} U_k \\ -U_k \end{pmatrix} \in E_6$ sont des vecteurs propres de M.

A12 Déduire de **11** que M est diagonalisable, et préciser son spectre.

A13 Montrer que $\chi_M = \chi_A . \chi_{-A}$.

A14 Soit $M_2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix}$, montrer que $M_2^2 = M_2$. En déduire M_2^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

A15 Soit $M_1 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix}$, que peut-on dire de la matrice $M_1^3 - M_1$? Et du spectre de M_1 ?
En déduire M_1^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

A16 Quel est le spectre de $B_1 = \begin{pmatrix} (0)_6 & M_1 \\ M_1 & (0)_6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$?

On considère la matrice de $\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

A17 Déterminer le noyau des matrices A_3 et $A_3 - I_3$.

A18 Montrer que le spectre de A_3 est $\{0,1\}$, en précisant l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres.

A19 Montrer que A_3 n'est pas diagonalisable. Est-elle semblable à A_2 ?

A20 Montrer qu'il existe une matrice P_3, de première ligne $(2,1,-1)$, telle que $A_3 = P_3.T_3.P_3^{-1}$, où $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$, et l'application $\begin{array}{ccl} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P|Q\rangle = P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1) \end{array}$

B1 Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

B2 Montrer que si P est pair et Q impair, alors $P \perp Q$ pour le produit scalaire ainsi défini.

B3 Calculer $\langle 1|1\rangle$, $\langle 1|X^2\rangle$, $\langle X|X\rangle$ et $\langle X^2|X^2\rangle$.

B4 Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2)$.

B5 Quel est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$? Quelle est la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$?

B6 Déterminer la valeur minimale de $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1}\left(k^2 - a\,k - b\right)^2$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, en précisant les réels a et b correspondant au minimum.

Partie C

On se place ici dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère la matrice $R_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C1 Montrer que R_1 est orthogonale, non symétrique, et que $R_1.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

C2 Montrer que R_1 est une matrice de rotation, d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$, et donner un vecteur directeur de l'axe de la rotation. Préciser si l'angle vaut $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

C3 Justifier que la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé par $\vec{\imath}$ est $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C4 Quelle est la nature des isométries définies par les matrices R_1^2 et R_2^2 ?

C5 Calculer la matrice $R_1.R_2$; déterminer la nature et les éléments de l'isométrie ainsi définie.

C6 Mêmes questions pour $R_2.R_1$.

Partie D

On considère la matrice $S = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -4 \\ 1 & 11 & 4 \\ -4 & 4 & 14 \end{pmatrix}$.

D1 Montrer sans calcul que S est diagonalisable. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?

D2 Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de S, et déterminer les sous-espaces propres associés.

D3 Déterminer une matrice P orthogonale et trois réels α, β, γ (avec $\alpha < \beta < \gamma$) tels que $S = P.\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma).P^\top$.

D4 Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, et $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Calculer $\varphi(x,y,z) = X^\top.S.X$.

Soit $(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $X_1 = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, tels que $X = P.X_1$.

Montrer que $X^\top.S.X = \alpha\,x_1^2 + \beta\,y_1^2 + \gamma\,z_1^2$, et que $x^2+y^2+z^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2$.

D5 Montrer que, pour tous réels (x,y,z) : $x^2+y^2+z^2 \leqslant \varphi(x,y,z) \leqslant 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.
Quelles sont les valeurs de (x,y,z) pour lesquelles $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$?
Et quelles sont les valeurs de (x,y,z) pour lesquelles $\varphi(x,y,z) = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$?