**PT CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 3 30/11/2024**

**Ce devoir se compose de quatre parties indépendantes — Calculatrices interdites**

# Partie A

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes à $n$ lignes.
$(0)_n$ désigne la matrice carrée nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $0_n$ le vecteur-colonne nul de $E_n$.
Si $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, alors $\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\alpha,\beta,\gamma$.
On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ : $A_1 = \begin{pmatrix}0&2&-2\\-1&-3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**A1** *Montrer que $A_2^2 = A_2$.*

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ , donc $\boxed{A_2^2 = A_2}$.

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

**A2** *Soit $\lambda$ une valeur propre de $A_2$, déduire de $A_2^2 = A_2$ que $\lambda \in \{0,1\}$.*

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A_2$ et $X$ un vecteur propre associé, alors $A_2.X = \lambda X$ et $X \neq (0)$, donc $A_2^2.X = A_2.(A_2.X) = A_2.(\lambda X) = \lambda(A_2.X) = \lambda^2 X$ ; comme par ailleurs $A_2^2 = A_2$, $A_2^2.X = A_2.X = \lambda X$ donc $\lambda^2 X = \lambda X$ ; mais comme $X \neq (0)$, $\lambda^2 = \lambda$ et ainsi $\boxed{\lambda \in \{0,1\}}$

**A3** *Diagonaliser $A_2$.*

On sait d'après la question $\boxed{2}$ que $\mathrm{Sp}(A_2) \subset \{0,1\}$, et alors $\mathrm{rg}(A_2) \in \{0,1,2\}$. Les colonnes de $A_2$ étant non proportionnelles, $\mathrm{rg}(A_2) = 2$, donc d'après la formule du rang, $\dim E_0(A_2) = \dim \mathrm{Ker}(A_2) = 3-1 = 2$.
En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $A_2$, on constate que $C_1 + C_2 + C_3 = (0)$, donc $E_0(A_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
De plus, $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix}0&2&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $E_1(A_2)$ est un plan vectoriel d'équation cartésienne $y - z = 0$.
On obtient alors $E_1(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Finalement $\boxed{A_2 = P_2.\mathrm{diag}(0,1,1).P_2^{-1} \text{ avec } P_2 = \begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

**A4** *Donner (sans justification) le rang de $A_1$ ? Déterminer $\mathrm{Ker}(A_1)$.*

$\mathrm{rg}(A_1) = 2$. En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $A_1$, $C_1 + C_2 + C_3 = (0)$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A_1) = E_0(A_1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

**A5** *Montrer que $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A_1$, et préciser la valeur propre associée.*

On vérifie que $A_1.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\\4-3\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A_1 \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

**A6** *Que vaut $\mathrm{Tr}(A_1)$ ? Déterminer le spectre de $A_1$ ; justifier sans autre calcul que $A_1$ est diagonalisable.*

Un calcul élémentaire donne $\mathrm{Tr}(A_1) = 0$. Comme $X(X-1)$ divise la polynôme caractéristique de $A_1$, celui-ci est focément scindé dans $\mathbb{R}$, et s'écrit $X(X-1)(X-\lambda)$, avec $0+1+\lambda = 0$, donc $\lambda = -1$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(A_1) = \{-1,0,1\}}$.
Comme les valeurs propres de $A_1$ sont simples ($\chi_{A_1}$ est simplement scindé), $\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable}}$ et ses sous-espaces propres sont des droites.

**A7** *Diagonaliser $A_1$. Montrer que les vecteurs propres de $A_1$ sont aussi vecteurs propres de $A_2$.*

$A_1 + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ; en notant $C_1, C_2, C_3$ ses colonnes, $2C_1 - C_2 = 0$, donc $E_{-1}(A_1) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\boxed{A_1 = P_1.\text{diag}(-1,0,1).P_1^{-1}, \text{ avec } P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

On vérifie par ailleurs que $A_2.P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $\boxed{\text{les vecteurs propres de } A_1 \text{ respectivement attachés aux valeurs propres } -1,0,1}$

sont des $\boxed{\text{vecteurs propres de } A_2 \text{ respectivement attachés aux valeurs propres } 0,1,1}$.

**A8** *Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D_1 = P^{-1}A_1P$ et $D_2 = P^{-1}A_2P$ soient des matrices diagonales. On précisera les coefficients diagonaux de $D_1$ et $D_2$.*

Étant donné le résultat de la question précédente, on peut prendre

$\boxed{P = P_2,\ D_1 = \text{diag}(-1,0,1) \text{ et } D_2 = \text{diag}(0,1,1)}$.

**A9** *Montrer (avec le minimum de calculs) que $A_1.A_2 = A_2.A_1$.*

Alors $A_1.A_2 = P.D_1.D_2.P^{-1} = P.\text{diag}(0,0,1).P^{-1}$, et puisque $D_2 = D_1$, $\boxed{A_1.A_2 = A_2.A_1}$.

**A10** *Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables, en précisant leur spectre : $A_2 - A_1$, $A_1.A_2$, $A_1^2 + A_2^2$, $A_1^3 - A_1$ et $A_2^3 - A_2$.*

* $A_2 - A_1 = P.(D_2 - D_1).P^{-1}$, avec $D_2 - D_1 = \text{diag}(1,1,0)$ donc $\text{Sp}(A_2 - A_1) = \{0,1\}$.
* $A_1.A_2 = P.(D_1.D_2).P^{-1}$, avec $D_1.D_2 = \text{diag}(0,0,1)$ donc $\text{Sp}(A_1.A_2) = \{0,1\}$.
* $A_1^2 + A_2^2 = P.(D_1^2 + D_2^2).P^{-1}$, avec $D_1^2 + D_2^2 = \text{diag}(1,1,2)$ donc $\text{Sp}(A_1^2 + A_2^2) = \{1,1,2\}$.
* $A_1^3 - A_1 = P.(D_1^3 - D_1).P^{-1}$, avec $D_1^3 - D_1 = \text{diag}(0,0,0)$ donc $\text{Sp}(A_1^3 - A_1) = \{0\}$.
* $A_2^3 - A_2 = P.(D_2^2 - D_2).P^{-1}$, avec $D_2^2 - D_2 = \text{diag}(0,0,0)$ donc $\text{Sp}(A_2^2 - A_2) = \{0\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, et la matrice $M = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$.

On appelle $(U_1, U_2, U_3)$ une base de vecteurs propres de $A$ ($U_k \in E_3$), et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les valeurs propres associées : *ie* pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, $A.U_k = \lambda_k U_k$.

**A11** *Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, montrer que $V_k = \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} \in E_6$ et $W_k = \begin{pmatrix} U_k \\ -U_k \end{pmatrix} \in E_6$ sont des vecteurs propres de $M$.*

$M.V_k = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.U_k \\ A.U_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = \lambda_k V_k$, et $M.W_k = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} U_k \\ -U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A.U_k \\ A.U_k \end{pmatrix} = -\lambda_k \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = -\lambda_k W_k$.

Ainsi $V_k$ et $W_k$ sont des $\boxed{\text{vecteurs propres de } M}$, associés aux valeurs propres respectives $\lambda_k$ et $-\lambda_k$.

**A12** *Déduire de $\boxed{\mathit{II}}$ que $M$ est diagonalisable, et préciser son spectre.*

$F = \text{Vect}(V_1, \dots, V_n)$ et $G = \text{Vect}(W_1, \dots, W_n)$ sont des sous-espaces de $E$ de dimension $n$ ; de plus, $F \cap G = \{0\}$ : en effet, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k V_k + \beta_k W_k = (0_{2n})$, alors en projetant sur les $n$ premières composantes : $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)U_k = (0_n)$, et en projetant sur les $n$ dernières composantes : $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)U_k = (0_n)$ ; par addition et soustraction : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k U_k = (0_n)$, donc par liberté de la famille $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.

Finalement $F \oplus G = E$, donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$, de spectre $\boxed{\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \cup \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_k\}}$.

**A13** *Montrer que $\chi_M = \chi_A \cdot \chi_{-A}$.*

$\chi_M = \begin{vmatrix} X\,I_3 & -A \\ -A & X\,I_3 & -A \end{vmatrix}$

On effectue un pivot de Gauss par bloc sur les colonnes $(C_1) \leftarrow (C_1) + (C_2)$, c'est-à-dire $C_k \leftarrow C_k + C_{n+k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ :

$\chi_M = \begin{vmatrix} X\,I_3 - A & -A \\ X\,I_3 - A & X\,I_3 - A & X\,I_3 \end{vmatrix} \underset{(L_2)\leftarrow(L_2)-(L_1)}{=} \begin{vmatrix} X\,I_3 - A & -A \\ (0)_3 & X\,I_3 + A \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\chi_M = \chi_A \cdot \chi_A}$

**A14** *Soit $M_2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix}$, montrer que $M_2^2 = M_2$. En déduire $M_2^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

$M_2^2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_2 \end{pmatrix} = M_2$, et donc par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$ : $\boxed{M_2^n = M_2}$.

**A15** *Soit $M_1 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix}$, que peut-on dire de la matrice $M_1^3 - M_1$ ? Et du spectre de $M_1$ ? En déduire $M_1^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

$M_1^2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_1^2 \end{pmatrix}$, et de même $M_1^3 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1^3 \\ A_1^3 & (0)_3 \end{pmatrix} = M_1$. Alors $M_1^3 - M_1 = (0)_6$.

De même qu'en question $\boxed{2}$, si $\lambda$ est une valeur propre de $M_1$ et $X$ un vecteur propre associé, alors $M_1^3.X = \lambda^3 X = \lambda X$, donc $\lambda^3 = \lambda$ et $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ : $\boxed{\mathrm{Sp}(M_1) = \{-1, 0, 1\}}$ (l'égalité est garantie par l'existence de vecteurs propres, construits sur le modèle des $V_k$ et $W_k$). $M_1^3 = M_1$, donc $\boxed{M_1^n = \begin{cases} M_1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ M_1^2 \text{ si } n \text{ est pair } (n \geqslant 2) \end{cases}}$.

**A16** *Quel est le spectre de $B_1 = \begin{pmatrix} (0)_6 & M_1 \\ M_1 & (0)_6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{12}(\mathbb{R})$ ?*

Un calcul analogue à celui de la question précédente (on remplace $M_1$ par $B_1$, puis $A_1$ par $M_1$) donne $B_1^3 = B_1$, puis $\boxed{\mathrm{Sp}(B_1) = \{-1, 0, 1\}}$.

> On considère la matrice de $\in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ : $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

**A17** *Déterminer le noyau des matrices $A_3$ et $A_3 - I_3$.*

En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $A_3$, on constate que $2C_1 = C_2$, donc $\mathrm{rg}(A_3) < 3$ ; comme $C_1$ et $C_3$ ne sont pas colinéaires, $\mathrm{rg}(A_3) > 1$ donc $\mathrm{rg}(A_3) = 2$, et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de

$A_3 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C_1 + C_2 + C_3 = (0_3)$. De manière analogue, $\boxed{\mathrm{Ker}(A_3 - I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

**A18** *Montrer que le spectre de $A_3$ est $\{0, 1\}$, en précisant l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres.*

0 et 1 sont des valeurs propres réelles de $A_3$, donc le polynôme caractéristique de $A_3$ est divisible par $X(X-1)$ ; il est donc scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit $X(X-1)(X-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\mathrm{Tr}(A_3) = 2$, $\lambda + 0 + 1 = 2$, donc $\lambda = 1$, et $\boxed{\text{le spectre de } A_3 \text{ est } \{0, 1\}}$ ; $m(0) = 1$ et $m(1) = 2$ (0 est simple et 1 est double).

**A19** *Montrer que $A_3$ n'est pas diagonalisable. Est-elle semblable à $A_2$ ?*

On sait que $\mathrm{rg}(A_3 - I_3) = 2$, donc $\dim(E_1(A_3)) = 1 < 2 = m(1)$.

Ainsi $\boxed{A_3 \text{ est non diagonalisable et ne peut pas être semblable à } A_2}$, qui est diagonalisable.

**A20** *Montrer qu'il existe une matrice $P_3$, de première ligne $(2,1,-1)$, telle que $A_3 = P_3.T_3.P_3^{-1}$, où $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Interprétons les colonnes de $T_3$ : nous cherchons donc une base $(U,V,W)$ de $E_3$ telle que $A_3.U = (0_3)$, $A_3.V = V$ et $A_3.W = V + W$ ; de plus, les premières composantes de $U,V,W$ sont respectivement $2,1,-1$.

La question **17** donne $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les composantes $(x,y,z)$ vérifient le système $\begin{cases} (1) & -x+z=1 \\ (2) & -x-3y-4z=0 \\ (3) & -x-2y+3z=1 \end{cases}$ ; comme $(2) = (3)-(1)$, en tenant compte de l'équation $x=-1$, on obtient $\begin{cases} 1+z & =1 \\ 1-2y & =1 \end{cases}$. Ainsi $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement $A_3 = P_3.T_3.P_3^{-1}$, avec $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

# Partie B

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$, et l'application $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P|Q\rangle = P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1) \end{array}$

**B1** *Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.*

* **symétrie** : pour tous $(P,Q)\in\mathbb{R}^2, P.Q = Q.P$ donc $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle$.
* **bilinéarité** : soit $P,Q_1,Q_2$ trois éléments de $E$, et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\langle P|Q_1+\lambda Q_2\rangle = \langle P|Q_1\rangle + \lambda\langle P|Q_2\rangle$, donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est linéaire à droite, et, par symétrie, est bilinéaire.
* **caractère défini et positif** : pour tout $P\in E$, $\langle P|P\rangle = P(-1)^2+P(0)^2+P(1)^2 \geqslant 0$ ; de plus, $\langle P|P\rangle = 0$ si, et seulement si, $P(1)=P(0)=P(-1)=0$ ; comme $\deg P\leqslant 2$, $P$ est alors nul.

En conclusion, $\boxed{\langle\cdot|\cdot\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } E}$.

**B2** *Montrer que si $P$ est pair et $Q$ impair, alors $P\perp Q$ pour le produit scalaire ainsi défini.*

Soit $P$ un polynôme pair et $Q$ un polynôme impair, alors $P.Q$ est impair, donc $P.Q(0)=0$ et $P.Q(-1) = -P.Q(1)$, donc $\langle P|Q\rangle = 0$ : $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont orthogonaux}}$.

**B3** *Calculer $\langle 1|1\rangle$, $\langle 1|X^2\rangle$, $\langle X|X\rangle$ et $\langle X^2|X^2\rangle$.*

$\langle 1|1\rangle = 1+1+1 = 3$ (Attention, le polynôme 1 étant constant, il vaut 1 en 0 !).

$\boxed{\langle 1|X^2\rangle = 1+0+1 = 2 ; \langle X|X\rangle = \langle 1|X^2\rangle = 2, \text{ et } \langle X^2|X^2\rangle = 1+0+1 = 2}$.

remarque : de manière générale, $\langle X^k|X^k\rangle = 2$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

**B4** *Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ : $(1,X,X^2)$.*

1 et $X$ sont déjà orthogonaux ; on pose donc $P_0 = 1, P_1 = X$, puis $P_2 = X^2 - \dfrac{\langle X|X^2\rangle}{\langle X|X\rangle}X - \dfrac{\langle 1|X^2\rangle}{\langle 1|1\rangle}1 = X^2 - 0 - \dfrac{2}{3}$.

La base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ ainsi obtenue est donc $\boxed{(P_0,P_1,P_2) = \left(1, X, X^2 - \dfrac{2}{3}\right)}$.

**B5** *Quel est le projeté orthogonal de $X^2$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ ? Quelle est la distance de $X^2$ à $\mathbb{R}_1[X]$ ?*

Il résulte de la question précédente que $X^2 = P_2 + \frac{2}{3}P_0$, dont le projeté sur $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1)$ est $\boxed{\frac{2}{3}P_0}$.

La distance $d$ de $X^2$ à $\mathbb{R}_1[X]$ vérifie $d^2 = \left\|X^2 - \frac{2}{3}P_0\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|\frac{2}{3}P_0\right\|^2$ d'après Pythagore et puisque $P_2 \perp P_0$.
Or $\left\|\frac{2}{3}P_0\right\|^2 = \frac{4}{9}\left\|P_0\right\|^2 = \frac{4}{9}3 = \frac{4}{3}$, et $\left\|X^2\right\|^2 = 2$ d'après la question $\boxed{3}$, donc $d^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et finalement $\boxed{\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}}$.

**B6** *Déterminer la valeur minimale de $\sum_{k=-1}^{1}\left(k^2 - a\,k - b\right)^2$ lorsque $(a, b)$ décrit $\mathbb{R}^2$, en précisant les réels $a$ et $b$ correspondant au minimum.*

$\sum_{k=-1}^{1}\left(k^2 - a\,k - b\right)^2 = \left\|X^2 - aX - b\right\|^2$, qui est minimale pour $aX + b = \frac{2}{3}$ *ie* $\boxed{a = 0, b = \frac{2}{3}}$; la valeur du minimum est $\boxed{d = \sqrt{\frac{2}{3}}}$.

## Partie C

On se place ici dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère la matrice $R_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**C1** *Montrer que $R_1$ est orthogonale, non symétrique, et que $R_1.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.*

Soit $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $R_1$ ; alors $\|C_1\|^2 = \frac{1}{4}(2+2) = 1$ ; $\|C_2\|^2 = \frac{1}{4}(1+1+2) = 1 = \|C_3\|^2$.
De plus, ${C_1}^\top.C_2 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = 0$ ; ${C_1}^\top.C_3 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = 0$ et ${C_2}^\top.C_3 = \frac{-2+1+1}{4} = 0$, donc $\boxed{R_1 \in \mathscr{O}(3)}$.
$R_1 \neq {R_1}^\top$ donc $\boxed{R_1 \text{ n'est pas symétrique}}$ ; enfin $R_1.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+\sqrt{2}\\1+1\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**C2** *Montrer que $R_1$ est une matrice de rotation, d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, et donner un vecteur directeur de l'axe de la rotation. Préciser si l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.*

$R_1$ est une isométrie non symétrique, qui admet 1 pour valeur propre, donc ne peut être qu'une rotation, dont l'axe est dirigé par $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est un vecteur propre attaché à la valeur propre, donc un vecteur invariant ; si $\theta$ est l'angle de $R_1$, alors $\mathrm{Tr}(R_1) = 1 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = 0$.
Finalement, $\boxed{R_1 \text{ est une matrice de rotation d'angle } \pm\frac{\pi}{2} \text{ et d'axe dirigé par } \omega = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$.
Mais $\det\left(\vec{\imath}, r_1(\vec{\imath}), \omega\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2} > 0$, donc $\sin\theta > 0$ et $\boxed{\theta = +\frac{\pi}{2}}$.

**C3** *Justifier que la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé par $\vec{\imath}$ est $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

On peut faire un schéma, ou bien constater que $r_2(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$, $r_1(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ et $r_1(\vec{k}) = \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

Par construction colonne par colonne, on aboutit à la matrice $\boxed{R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

**C4** *Quelle est la nature des isométries définies par les matrices $R_1^2$ et $R_2^2$ ?*

$R_1$ et $R_2$ sont des quarts de tour, donc $R_1^2$ et $R_2^2$ sont $\boxed{\text{les demi-tours d'axe respectivement dirigés par } \omega \text{ et } \vec{\imath}}$.

**C5** *Calculer la matrice $R_1.R_2$ ; déterminer la nature et les éléments de l'isométrie ainsi définie.*

Un calcul matriciel aboutit à $R_1.R_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice de rotation, d'angle $\alpha$ tel que $1+2\cos\alpha = \mathrm{Tr}(R_1.R_2) = 0$, soit $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ donc $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.

$R_1.R_2 - I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$. En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de cette matrice, on constate que $C_1 + \sqrt{2}C_2 = (0)$ ; donc l'axe de la rotation est dirigé par $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin $\det(\vec{\imath}, r_1 \circ r_2(\vec{\imath}), \vec{a}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$, donc $\sin\alpha > 0$ et $\alpha = +\dfrac{2\pi}{3}$.

$$\boxed{R_1.R_2 \text{ est une matrice de rotation d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ et d'axe dirigé par } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

**C6** *Mêmes questions pour $R_2.R_1$.*

Un calcul matriciel aboutit à $R_2.R_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice de rotation, d'angle $\beta$ tel que $1+2\cos\beta = \mathrm{Tr}(R_2.R_1) = 0$, soit $\cos\beta = \frac{-1}{2}$ donc $\beta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.

$R_2.R_1 - I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En appelant $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de cette matrice, on constate que $C_1 + \sqrt{2}C_3 = (0)$ ; donc l'axe de la rotation est dirigé par $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Enfin $\det(\vec{\imath}, r_2 \circ r_1(\vec{\imath}), \vec{a}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}0$, donc $\sin\beta > 0$ et $\beta = +\dfrac{2\pi}{3}$.

$$\boxed{R_2.R_1 \text{ est une matrice de rotation d'angle } \frac{2\pi}{3} \text{ et d'axe dirigé par } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}.$$

# Partie D

On considère la matrice $S = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -4 \\ 1 & 11 & 4 \\ -4 & 4 & 14 \end{pmatrix}$.

**D1** *Montrer sans calcul que $S$ est diagonalisable. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?*

D'après le théorème spectral, $S$ est symétrique réelle, donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

**D2** *Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de $S$, et déterminer les sous-espaces propres associés.*

$S-I_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&5&4\\-4&4&8\end{pmatrix}$ vérifie $C_1-C_2+C_3=(0_3)$, donc est de rang 2 (après élimination rapide des hypothèses $\mathrm{rg}(S)=0$ et $\mathrm{rg}(S)=1$). 1 est une valeur propre de $S$, et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_1(S)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$.

$S-2I_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&-4\\1&-1&4\\-4&4&3\end{pmatrix}$ vérifie $C_1+C_2=(0_3)$, donc est de rang 2. 2 est une valeur propre de $S$, et le sous-espace propre associé est $\boxed{E_2(S)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$.

**D3** *Déterminer une matrice $P$ orthogonale et trois réels $\alpha,\beta,\gamma$ (avec $\alpha<\beta<\gamma$) tels que $S=P.\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\gamma).P^T$.*

$\mathrm{Tr}(S)=\dfrac{36}{6}=6=1+2+\lambda$ avec $\lambda=3$ : la troisième valeur propre de $S$ est 3.

Le sous-espace vectoriel associé est une droite dirigée par $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, donc $E_3(S)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Une fois ces vecteurs normés (il sont déjà orthogonaux), on trouve que $\boxed{S=P.\mathrm{diag}(1,2,3).P^{-1}}$ avec

$$\boxed{P=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2&\sqrt3&-1\\-\sqrt2&\sqrt3&1\\\sqrt2&0&2\end{pmatrix}}.$$

**D4** *Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Calculer $\varphi(x,y,z)=X^T.S.X$.*

*Soit $(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ et $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, tels que $X=P.X_1$.*

*Montrer que $X^T.S.X=\alpha\,x_1^2+\beta\,y_1^2+\gamma\,z_1^2$, et que $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$.*

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11x+y-4z\\x+11y+4z\\-4x+4y+14z\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\left(11x^2+xy-4xz+xy+11y^2+4yz-4xz+4yz+14z^2\right),$$

donc $\boxed{\varphi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt6}\left(11x^2+11y^2+14z^2-2xy-8xz+8yz\right)}$.

$X=P^{\mathsf T}.X_1$ et $S=P.\Delta.P^{\mathsf T}$ donc $X^{\mathsf T}.S.X=(P.X_1)^{\mathsf T}.P.\Delta.P^{\mathsf T}.(P.X_1)={X_1}^{\mathsf T}.(P^{\mathsf T}.P).\Delta.(P^{\mathsf T}.P).X_1={X_1}^{\mathsf T}.\Delta.X_1$ donc $\boxed{X^{\mathsf T}.S.X=x_1^2+2y_1^2+3z_1^2}$, et par ailleurs : $x_1^2+y_1^2+z_1^2={X_1}^{\mathsf T}.X_1=X^{\mathsf T}.P.P^{\mathsf T}.X=X^{\mathsf T}.X$, donc $\boxed{x_1^2+y_1^2+z_1^2=x^2+y^2+z^2}$.

**D5** *Montrer que, pour tous réels $(x,y,z)$ : $x^2+y^2+z^2\leqslant\varphi(x,y,z)\leqslant3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.*
*Quelles sont les valeurs de $(x,y,z)$ pour lesquelles $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ?*
*Et quelles sont les valeurs de $(x,y,z)$ pour lesquelles $\varphi(x,y,z)=3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ?*

Pour tous réels $x_1,y_1,z_1$, $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant x_1^2+2y_1^2+3z_1^2\leqslant 3x_1^2+3y_1^2+3z_1^2$, car $3x_1^2+3y_1^2+3z_1^2-\left(x_1^2+2y_1^2+3z_1^2\right)=2x_1^2+y_1^2\geqslant0$ et $x_1^2+2y_1^2+3z_1^2-\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)=y_1^2+2z_1^2\geqslant0$.

$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ si, et seulement si $x_1^2+2y_1^2+3z_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$, c'est-à-dire si $y_1^2+2z_1^2=0$, c'est-à-dire $y_1=z_1=0$ ; ceci revient à écrire $\begin{cases}-\sqrt2x+\sqrt3y+z&=0\\\sqrt2x+2z&=0\end{cases}$, ces deux équations définissant une droite vectorielle : $\boxed{\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},x=\lambda\sqrt2,y=\lambda\sqrt3,z=-\lambda}$.

$\varphi(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2$ si, et seulement si $x_1^2+2y_1^2+3z_1^2=3x_1^2+3y_1^2+3z_1^2$, c'est-à-dire si $2x_1^2+y_1^2=0$, c'est-à-dire $x_1=y_1=0$ ; ceci revient à écrire $\begin{cases}\sqrt2x+\sqrt3y-z&=0\\-\sqrt2x+\sqrt3y+z&=0\end{cases}$, ces deux équations définissant une droite vectorielle : $\boxed{\varphi(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},x=\lambda,y=0,z=\lambda\sqrt2}$.