Partie A

A1
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } A_2^2 = A_2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A2 Soit λ une valeur propre de A_2 et X un vecteur propre associé, alors $A_2 \cdot X = \lambda X$ et $X \neq (0)$, donc $A_2^2 \cdot X = A_2 \cdot (A_2 \cdot X) = A_2 \cdot (\lambda X) = \lambda (A_2 \cdot X) = \lambda^2 X$; comme par ailleurs $A_2^2 = A_2$, $A_2^2 \cdot X = A_2 \cdot X = \lambda X$ donc $\lambda^2 X = \lambda X$; mais comme $X \neq (0)$, $\lambda^2 = \lambda$ et ainsi $\lambda \in \{0, 1\}$

A3 On sait d'après la question **2** que $\text{Sp}(A_2) \subset \{0, 1\}$, et alors $\text{rg}(A_2) \in \{0, 1, 2\}$. Les colonnes de A_2 étant non proportionnelles, $\text{rg}(A_2) = 2$, donc d'après la formule du rang, $\dim E_0(A_2) = \dim \text{Ker}(A_2) = 3 - 1 = 2$. En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A_2 , on constate que $C_1 + C_2 + C_3 = (0)$, donc $E_0(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

De plus, $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $E_1(A_2)$ est un plan vectoriel d'équation cartésienne $y - z = 0$.

On obtient alors $E_1(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Finalement $A_2 = P_2 \cdot \text{diag}(0, 1, 1) \cdot P_2^{-1}$ avec $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A4 $\text{rg}(A_1) = 2$. En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A_1 , $C_1 + C_2 + C_3 = (0)$, donc $\text{Ker}(A_1) = E_0(A_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

A5 On vérifie que $A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre 1.

A6 Un calcul élémentaire donne $\text{Tr}(A_1) = 0$. Comme $X(X-1)$ divise le polynôme caractéristique de A_1 , celui-ci est forcément scindé dans $\mathbb{R}$, et s'écrit $X(X-1)(X-\lambda)$, avec $0+1+\lambda = 0$, donc $\lambda = -1$ et $\text{Sp}(A_1) = \{-1, 0, 1\}$.

Comme les valeurs propres de A_1 sont simples (χ_{A_1} est simplement scindé), A_1 est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

A7 $A_1 + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; en notant C_1, C_2, C_3 ses colonnes, $2C_1 - C_2 = 0$, donc $E_{-1}(A_1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Alors $A_1 = P_1 \cdot \text{diag}(-1, 0, 1) \cdot P_1^{-1}$, avec $P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie par ailleurs que $A_2 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

donc les vecteurs propres de A_1 respectivement attachés aux valeurs propres $-1, 0, 1$ sont des vecteurs propres de A_2 respectivement attachés aux valeurs propres $0, 1, 1$.

A8 Étant donné le résultat de la question précédente, on peut prendre

$$P = P_2, D_1 = \text{diag}(-1, 0, 1) \text{ et } D_2 = \text{diag}(0, 1, 1).$$

A9 Alors $A_1 \cdot A_2 = P \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(0, 0, 1) \cdot P^{-1}$, et puisque $D_2 = D_1$, $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$.

- A10**
- * $A_2 - A_1 = P \cdot (D_2 - D_1) \cdot P^{-1}$, avec $D_2 - D_1 = \text{diag}(1, 1, 0)$ donc $\text{Sp}(A_2 - A_1) = \{0, 1\}$.
 - * $A_1 \cdot A_2 = P \cdot (D_1 \cdot D_2) \cdot P^{-1}$, avec $D_1 \cdot D_2 = \text{diag}(0, 0, 1)$ donc $\text{Sp}(A_1 \cdot A_2) = \{0, 1\}$.
 - * $A_1^2 + A_2^2 = P \cdot (D_1^2 + D_2^2) \cdot P^{-1}$, avec $D_1^2 + D_2^2 = \text{diag}(1, 1, 2)$ donc $\text{Sp}(A_1^2 + A_2^2) = \{1, 1, 2\}$.
 - * $A_1^3 - A_1 = P \cdot (D_1^3 - D_1) \cdot P^{-1}$, avec $D_1^3 - D_1 = \text{diag}(0, 0, 0)$ donc $\text{Sp}(A_1^3 - A_1) = \{0\}$.
 - * $A_2^3 - A_2 = P \cdot (D_2^3 - D_2) \cdot P^{-1}$, avec $D_2^3 - D_2 = \text{diag}(0, 0, 0)$ donc $\text{Sp}(A_2^3 - A_2) = \{0\}$.

A11 $M \cdot V_k = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot U_k \\ A \cdot U_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = \lambda_k V_k$, et $M \cdot W_k = \begin{pmatrix} (0)_3 & A \\ A & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_k \\ -U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cdot U_k \\ A \cdot U_k \end{pmatrix} = -\lambda_k \begin{pmatrix} U_k \\ U_k \end{pmatrix} = -\lambda_k W_k$.

Ainsi V_k et W_k sont des vecteurs propres de M , associés aux valeurs propres respectives λ_k et $-\lambda_k$.

A12 $F = \text{Vect}(V_1, \dots, V_n)$ et $G = \text{Vect}(W_1, \dots, W_n)$ sont des sous-espaces de E de dimension n ; de plus, $F \cap G = \{0\}$: en effet, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k V_k + \beta_k W_k = (0_{2n})$, alors en projetant sur les n premières composantes : $\sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) U_k = (0_n)$, et en projetant sur les n dernières composantes :

$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k) U_k = (0_n)$; par addition et soustraction : $\sum_{k=1}^n \alpha_k U_k = \sum_{k=1}^n \beta_k U_k = (0_n)$, donc par liberté de la famille $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$.

Finalement $F \oplus G = E$, donc M est diagonalisable, de spectre $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$.

A13 $\chi_M = \begin{vmatrix} X I_3 & -A \\ -A & X I_3 \end{vmatrix}$

On effectue un pivot de Gauss par bloc sur les colonnes $(C_1) \leftarrow (C_1) + (C_2)$, c'est-à-dire $C_k \leftarrow C_k + C_{n+k}$ pour $1 \leq k \leq n$:

$\chi_M = \begin{vmatrix} X I_3 - A & -A \\ X I_3 - A & X I_3 - A \end{vmatrix} \xrightarrow{(L_2) - (L_1)} \begin{vmatrix} X I_3 - A & -A \\ (0)_3 & X I_3 + A \end{vmatrix}$ donc $\chi_M = \chi_A \cdot \chi_A$

A14 $M_2^2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0)_3 & A_2 \\ A_2 & (0)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2^2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_2 \end{pmatrix} = M_2$, et donc par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$: $M_2^n = M_2$.

A15 $M_1^2 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1 \\ A_1 & (0)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & (0)_3 \\ (0)_3 & A_1^2 \end{pmatrix}$, et de même $M_1^3 = \begin{pmatrix} (0)_3 & A_1^3 \\ A_1^3 & (0)_3 \end{pmatrix} = M_1$. Alors $M_1^3 - M_1 = (0)_6$.

De même qu'en question [2](#), si λ est une valeur propre de M_1 et X un vecteur propre associé, alors $M_1^3 \cdot X = \lambda^3 X = \lambda X$, donc $\lambda^3 = \lambda$ et $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$: $\text{Sp}(M_1) = \{-1, 0, 1\}$ (l'égalité est garantie par l'existence de vec-

teurs propres, construits sur le modèle des V_k et W_k). $M_1^3 = M_1$, donc $M_1^n = \begin{cases} M_1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ M_1^2 & \text{si } n \text{ est pair } (n \geq 2) \end{cases}$.

A16 Un calcul analogue à celui de la question précédente (on remplace M_1 par B_1 , puis A_1 par M_1) donne $B_1^3 = B_1$, puis $\text{Sp}(B_1) = \{-1, 0, 1\}$.

A17 En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A_3 , on constate que $2C_1 = C_2$, donc $\text{rg}(A_3) < 3$; comme C_1 et C_3 ne

sont pas colinéaires, $\text{rg}(A_3) > 1$ donc $\text{rg}(A_3) = 2$, et donc $\text{Ker}(A_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de

$A_3 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C_1 + C_2 + C_3 = (0_3)$. De manière analogue, $\text{Ker}(A_3 - I_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A18 0 et 1 sont des valeurs propres réelles de A_3 , donc le polynôme caractéristique de A_3 est divisible par $X(X - 1)$; il est donc scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit $X(X - 1)(X - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\text{Tr}(A_3) = 2$, $\lambda + 0 + 1 = 2$, donc $\lambda = 1$, et le spectre de A_3 est $\{0, 1\}$; $m(0) = 1$ et $m(1) = 2$ (0 est simple et 1 est double).

A19 On sait que $\text{rg}(A_3 - I_3) = 2$, donc $\dim(E_1(A_3)) = 1 < 2 = m(1)$.

Ainsi A_3 est non diagonalisable et ne peut pas être semblable à A_2 , qui est diagonalisable.

A20 Interprétons les colonnes de T_3 : nous cherchons donc une base (U, V, W) de E_3 telle que $A_3 \cdot U = (0_3)$, $A_3 \cdot V = V$ et $A_3 \cdot W = V + W$; de plus, les premières composantes de U, V, W sont respectivement 2, 1, -1.

La question **17** donne $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les composantes (x, y, z) vérifient le système $\begin{cases} (1) & -x + z = 1 \\ (2) & -x - 3y - 4z = 0 ; \text{ comme } (2) = (3) - (1), \text{ en tenant} \\ (3) & -x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$

compte de l'équation $x = -1$, on obtient $\begin{cases} 1 + z = 1 \\ 1 - 2y = 1 \end{cases}$. Ainsi $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement $A_3 = P_3 \cdot T_3 \cdot P_3^{-1}$, avec $P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B

- B1** * **symétrie** : pour tous $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$, $P \cdot Q = Q \cdot P$ donc $\langle P|Q \rangle = \langle Q|P \rangle$.
- * **bilinéarité** : soit P, Q_1, Q_2 trois éléments de E , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\langle P|Q_1 + \lambda Q_2 \rangle = \langle P|Q_1 \rangle + \lambda \langle P|Q_2 \rangle$, donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire à droite, et, par symétrie, est bilinéaire.
- * **caractère défini et positif** : pour tout $P \in E$, $\langle P|P \rangle = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \geq 0$; de plus, $\langle P|P \rangle = 0$ si, et seulement si, $P(1) = P(0) = P(-1) = 0$; comme $\deg P \leq 2$, P est alors nul.

En conclusion, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

B2 Soit P un polynôme pair et Q un polynôme impair, alors $P \cdot Q$ est impair, donc $P \cdot Q(0) = 0$ et $P \cdot Q(-1) = -P \cdot Q(1)$, donc $\langle P|Q \rangle = 0$: P et Q sont orthogonaux.

B3 $\langle 1|1 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$ (Attention, le polynôme 1 étant constant, il vaut 1 en 0!).

$$\langle 1|X^2 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2; \langle X|X \rangle = \langle 1|X^2 \rangle = 2, \text{ et } \langle X^2|X^2 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2.$$

remarque : de manière générale, $\langle X^k|X^k \rangle = 2$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

B4 1 et X sont déjà orthogonaux; on pose donc $P_0 = 1, P_1 = X$, puis $P_2 = X^2 - \frac{\langle X|X^2 \rangle}{\langle X|X \rangle} X - \frac{\langle 1|X^2 \rangle}{\langle 1|1 \rangle} 1 = X^2 - 0 - \frac{2}{3}$.

La base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ ainsi obtenue est donc $(P_0, P_1, P_2) = \left(1, X, X^2 - \frac{2}{3}\right)$.

B5 Il résulte de la question précédente que $X^2 = P_2 + \frac{2}{3}P_0$, dont le projeté sur $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(P_0, P_1)$ est $\frac{2}{3}P_0$.

La distance d de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ vérifie $d^2 = \|X^2 - \frac{2}{3}P_0\|^2 = \|X^2\|^2 - \|\frac{2}{3}P_0\|^2$ d'après Pythagore et puisque $P_2 \perp P_0$. Or $\|\frac{2}{3}P_0\|^2 = \frac{4}{9}\|P_0\|^2 = \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}$, et $\|X^2\|^2 = 2$ d'après la question **3**, donc $d^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et finalement

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

B6 $\sum_{k=-1}^1 (k^2 - ak - b)^2 = \|X^2 - aX - b\|^2$, qui est minimale pour $aX + b = \frac{2}{3}$ ie $a = 0, b = \frac{2}{3}$; la valeur du

minimum est $d = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Partie C

C1 Soit C_1, C_2, C_3 les colonnes de R_1 ; alors $\|C_1\|^2 = \frac{1}{4}(2+2) = 1$; $\|C_2\|^2 = \frac{1}{4}(1+1+2) = 1 = \|C_3\|^2$.

De plus, $C_1^\top \cdot C_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = 0$; $C_1^\top \cdot C_3 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = 0$ et $C_2^\top \cdot C_3 = \frac{-2+1+1}{4} = 0$, donc $R_1 \in \mathcal{O}(3)$.

$R_1 \neq R_1^\top$ donc R_1 n'est pas symétrique; enfin $R_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C2 R_1 est une isométrie non symétrique, qui admet 1 pour valeur propre, donc ne peut être qu'une rotation, dont l'axe est dirigé par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur propre attaché à la valeur propre, donc un vecteur invariant ; si θ est l'angle de R_1 , alors $\text{Tr}(R_1) = 1 = 1 + 2 \cos \theta$, donc $\cos \theta = 0$.

Finalement, R_1 est une matrice de rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ et d'axe dirigé par $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mais $\det(\vec{i}, r_1(\vec{i}), \omega) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2} > 0$, donc $\sin \theta > 0$ et $\theta = +\frac{\pi}{2}$.

C3 On peut faire un schéma, ou bien constater que $r_2(\vec{i}) = \vec{i}$, $r_1(\vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $r_1(\vec{k}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

Par construction colonne par colonne, on aboutit à la matrice $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C4 R_1 et R_2 sont des quarts de tour, donc R_1^2 et R_2^2 sont les demi-tours d'axe respectivement dirigés par ω et $\vec{i}$.

C5 Un calcul matriciel aboutit à $R_1.R_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice de rotation, d'angle α tel que $1 + 2 \cos \alpha = \text{Tr}(R_1.R_2) = 0$, soit $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ donc $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3}$.

$R_1.R_2 - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$. En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de cette matrice, on constate que

$C_1 + \sqrt{2}C_2 = (0)$; donc l'axe de la rotation est dirigé par $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin $\det(\vec{i}, r_1 \circ r_2(\vec{i}), \vec{a}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$, donc $\sin \alpha > 0$ et $\alpha = +\frac{2\pi}{3}$.

$R_1.R_2$ est une matrice de rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

C6 Un calcul matriciel aboutit à $R_2.R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice de rotation, d'angle β tel que $1 + 2 \cos \beta = \text{Tr}(R_2.R_1) = 0$, soit $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ donc $\beta = \pm \frac{2\pi}{3}$.

$R_2.R_1 - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de cette matrice, on constate que

$C_1 + \sqrt{2}C_3 = (0)$; donc l'axe de la rotation est dirigé par $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Enfin $\det(\vec{i}, r_2 \circ r_1(\vec{i}), \vec{a}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$, donc $\sin \beta > 0$ et $\beta = +\frac{2\pi}{3}$.

$R_2.R_1$ est une matrice de rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe dirigé par $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Partie D

D1 D'après le théorème spectral, S est symétrique réelle, donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

D2 $S - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ vérifie $C_1 - C_2 + C_3 = (0_3)$, donc est de rang 2 (après élimination rapide des hypothèses $\text{rg}(S) = 0$ et $\text{rg}(S) = 1$). 1 est une valeur propre de S , et le sous-espace propre associé est $E_1(S) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$S - 2I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ vérifie $C_1 + C_2 = (0_3)$, donc est de rang 2. 2 est une valeur propre de S , et le sous-espace propre associé est $E_2(S) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D3 $\text{Tr}(S) = \frac{36}{6} = 6 = 1 + 2 + \lambda$ avec $\lambda = 3$: la troisième valeur propre de S est 3.

Le sous-espace vectoriel associé est une droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $E_3(S) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une fois ces vecteurs normés (il sont déjà orthogonaux), on trouve que $S = P \cdot \text{diag}(1, 2, 3) \cdot P^{-1}$ avec

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D4 $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{6}} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 11x + y - 4z \\ x + 11y + 4z \\ -4x + 4y + 14z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (11x^2 + xy - 4xz + xy + 11y^2 + 4yz - 4xz + 4yz + 14z^2),$

donc $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{6}} (11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz + 8yz)$.

$X = P^T \cdot X_1$ et $S = P \cdot \Delta \cdot P^T$ donc $X^T \cdot S \cdot X = (P \cdot X_1)^T \cdot P \cdot \Delta \cdot P^T \cdot (P \cdot X_1) = X_1^T \cdot (P^T \cdot P) \cdot \Delta \cdot (P^T \cdot P) \cdot X_1 = X_1^T \cdot \Delta \cdot X_1$
donc

$X^T \cdot S \cdot X = x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2$, et par ailleurs : $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = X_1^T \cdot X_1 = X^T \cdot P \cdot P^T \cdot X = X^T \cdot X$, donc $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

D5 Pour tous réels x_1, y_1, z_1 , $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 \leq 3x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2$, car $3x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 - (x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2) = 2x_1^2 + y_1^2 \geq 0$ et $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = y_1^2 + 2z_1^2 \geq 0$.

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ si, et seulement si $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, c'est-à-dire si $y_1^2 + 2z_1^2 = 0$, c'est-à-dire $y_1 = z_1 = 0$; ceci revient à écrire $\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + z = 0 \\ \sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases}$, ces deux équations définissant une droite

vectorielle : $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda\sqrt{2}, y = \lambda\sqrt{3}, z = -\lambda$.

$\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ si, et seulement si $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 3x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2$, c'est-à-dire si $2x_1^2 + y_1^2 = 0$, c'est-à-dire $x_1 = y_1 = 0$; ceci revient à écrire $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y - z = 0 \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}$, ces deux équations définissant une

droite vectorielle : $\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda, y = 0, z = \lambda\sqrt{2}$.