PT DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 2 05/10/2024

Ce devoir se compose de trois parties indépendantes — Calculatrices interdites
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I_n désigne la matrice identité d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

Partie A

On définit l'application Φ sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $\Phi(P) = \left(1-X^2\right)P'' + 2XP'$.

A1 Montrer que Φ définit un endomorphisme sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

A2 Montrer que si P est pair (respectivement impair), alors $\Phi(P)$ est pair (respectivement impair).

A3 Montrer que $\deg(\Phi(P)) \leqslant \deg(P)$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ induit un endomorphisme noté Φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.

A4 Écrire la matrice $M_4 \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\Phi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & \Phi(P) \end{array}$.

A5 Montrer que $\operatorname{Ker}(\Phi_4) = \operatorname{Vect}(1, X^3 - 3X)$.

A6 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $Q = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$ appartienne à $\operatorname{Im}(\Phi_4)$ est

$$\begin{cases} 3a_4 + a_2 - a_0 & = 0 \\ a_3 & = 0 \end{cases}$$

A7 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que $\Phi(P) = X^4 - X^2 - X + 2$

A8 Quel est le rang de la matrice $M_4 - 2I_5$?
Déterminer tous les polynômes tels que $\left(1-X^2\right)P'' + 2XP' - 2P = 0$.

Partie B

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$; un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit ***ternaire*** si $f^3 = \mathrm{id}_E$, et ***anti-ternaire*** si $M^3 = -\mathrm{id}_E$.
De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***ternaire*** si $M^3 = I_n$, et ***anti-ternaire*** si $f^3 = -I_n$.

B1 Si f est ternaire, alors montrer que f est inversible et préciser son inverse; mêmes questions si f est anti-ternaire.

B2 Montrer que si f est anti-ternaire, alors f^2 est ternaire.

B3 Si f est anti-ternaire, et si $n = \dim E$ est pair, que peut-on dire de $\det f$? Et si n est impair ?

B4 Montrer que les matrices suivantes sont anti-ternaires :

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B5 On pose $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer Q_3^2, et $Q_3.A_3.Q_3$. En déduire que A_3 et ${A_3}^{\mathsf{T}}$ sont semblables.

B6 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, $-\mathrm{id}_E$ est antiternaire. Montrer par ailleurs que si $f^2 - f + \mathrm{id}_E = 0$, alors f est anti-ternaire.

B7 Soit f un endomorphisme anti-ternaire d'un espace E de dimension 3, tel que $f \neq -\mathrm{id}_E$ et $f^2 - f + \mathrm{id}_E \neq 0$; soit $x \in E \setminus \operatorname{Ker}\left(f^2 - f + \mathrm{id}_E\right) \operatorname{Ker}\left(f + \mathrm{id}_E\right)$.
Montrer qu'il n'existe pas de réel λ tel que $f(x) = \lambda x$.
Montrer que $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est une famille libre.
En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est A_3.
Retrouver le résultat de la question 5.

Partie C

Soit a, b, c, d quatre réels. i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine cubique de l'unité.

On considère les matrices $M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, on appelle $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

C1 Effectuer dans $\det(M_3)$ la transformation $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, et montrer que $\det(M_3) = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-a\,b-a\,c-b\,c\right)$.

C2 On considère M_3 comme une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$; soit les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $u = (1,1,1)$, $v = \left(1, j, j^2\right)$ et $w = \left(1, j^2, j\right)$.
U, V, W sont les vecteurs-colonnes associés respectivement à u, v, w ; ainsi $U = u^\top$, $V = v^\top$ et $W = w^\top$.

a) Vérifier que $j^3 = 1$, $j^2 = j^{-1}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

b) Montrer que $w = \overline{v}$. Calculer $\det(u, v, w)$, et en déduire que (u, v, w) est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) Déterminer des complexes α, β, γ tels que $M_3.U = \alpha\,U$, $M_3.V = \beta\,V$ et $M_3.W = \gamma\,W$ (on exprimera α, β, γ en fonction de a, b, c, j et j^2).

d) Déduire de la question précédente une matrice P_3 telle que $P_3^{-1}.M_3.P_3 = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$.
En déduire que $\det(M_3) = \alpha\,\beta\,\gamma$, et retrouver la factorisation de la question **1**.

C3 Par des opérations de pivot de Gauss sur les colonnes de M_4, montrer que

$$\det(M_4) = (a+b+c+d)(a+c-b-d)\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-a & a-b \end{vmatrix}$$

et en déduire une factorisation de $\det(M_4)$.

C4 On considère la matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
C_1, C_2, C_3 sont les colonnes de S.

a) Montrer que S est de rang 1, et que C_3 est un vecteur directeur de $\operatorname{Im}(S)$. Que vaut $S.C_3$?

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(S) = \operatorname{Vect}\left(C_1, C_2\right)$, puis que $\operatorname{Ker}(S)$ a pour équation cartésienne $x + j\,y + j^2\,z = 0$.

c) Montrer que $\operatorname{Im}(S) \subset \operatorname{Ker}(S)$. Que vaut S^2 ? Préciser S^n pour $n \geqslant 2$.

C5 Pour $k \in [\![0, 4]\!]$, on pose $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ i^k \\ (-1)^k \\ (-i)^k \end{pmatrix}$; u_k est le vecteur de $\mathbb{C}^4$ représenté par le vecteur-colonne U_k, et P_4 est la matrice dont les colonnes sont U_1, U_2, U_3, U_4.

a) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{C}^4$, puis que $P_4.\overline{P_4} = 4\,I_4$.
Quel est l'inverse de P_4 ?

b) Déterminer en fonction de a, b, c, d et i les complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $M_4.U_k = \lambda_k\,U_k$.

En déduire que $P_4^{-1}.M_4.P_4 = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\right)$.

c) Exprimer $\det(M_4)$ en fonction des complexes λ_k, puis retrouver le résultat de la question **3**.