PT CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 2 05/10/2024

Partie A

A1 Φ est linéaire : en effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, alors
$\Phi(P+\lambda Q) = \left(1-X^2\right)(P''+\lambda Q'')+2X(P'+\lambda Q') = \left(1-X^2\right)P''+2XP'+\lambda\left(\left(1-X^2\right)Q''+2XQ'\right) = \Phi(P)+\lambda\Phi(Q)$.
De plus, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est clairement un polynôme, donc finalement
$\boxed{\Phi \text{ définit un endomorphisme sur } \mathbb{R}[X]}$.

A2 Si P est pair, alors P' est impair et P'' est pair ; $\left(1-X^2\right)P''$ et $2XP'$ sont des polynômes pairs, donc $\boxed{\Phi(P) = \text{est un polynôme pair}}$.
Si P est impair, alors P' est pair et P'' est impair ; $\left(1-X^2\right)P''$ et $2XP'$ sont des polynômes impairs, donc $\boxed{\Phi(P) = \text{est un polynôme impair}}$. (raisonnement analogue).

A3 Soit $P \neq 0$; posons $p = \deg(\Phi(P)) \in \mathbb{N}$, alors $\deg(P'') \leqslant p-1$ et $\deg(P'') \leqslant p-2$, donc $\deg\left(\left(1-X^2\right)P''\right) \leqslant p$ et $\deg\left(2XP'\right) \leqslant p$, donc finalement $\boxed{\deg(\Phi(P)) \leqslant p = \deg(\Phi(P))}$.
Si $P = 0$, alors $\deg(P) = -\infty = \deg(\Phi(P))$.

A4 $\Phi\left(X^j\right) = \left(1-X^2\right)j(j-1)X^{j-2}+2XjX^{j-1} = j(j-1)\left(X^{j-2}-X^j\right)+2jX^j = (-j^2+j+2j)X^j+j(j-1)X^{j-2} = -j(j-3)X^j+j(j-1)X^{j-2}$.
On peut donc construire colonne par colonne la matrice M_4 :

$$\boxed{M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}.$$

A5 Un pivot de Gauss sur les lignes de M_4 aboutit à $M_4 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{rg}(M_4) = 3$ et $\dim \operatorname{Ker}(M_4) = 5-3 = 2$.

Le système obtenu en (x,y,z,t,u) pour décrire $\dim \operatorname{Ker}(M_4)$ est $\begin{cases} z & = 0 \\ y+3t & = 0 \\ u & = 0 \end{cases}$, donc $(x,y,z,t,u) = \lambda(1,0,0,0,0)+\mu(0,-3,0,1,0)$, autrement dit $\boxed{\operatorname{Ker}(\Phi_4) = \operatorname{Vect}(1, X^3-3X).}$

A6 Effectuons un pivot de Gauss sur les lignes de la matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & a_4 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_0/2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2-a_0+3a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_4/4 \end{array}\right),$$

donc le système équivalent à $\Phi_4(P) = Q$ est compatible si et seulement si $\boxed{\begin{cases} 3a_4+a_2-a_0 & = 0 \\ a_3 & = 0 \end{cases}}$,

et alors les solutions sont $(x,y,z,t,u) = \left(\lambda, 3\mu, \dfrac{a_0}{2}, \dfrac{a_1}{2}-\mu, -\dfrac{a_4}{4}\right)$.

A7 En particulier, si $Q = X^4-X^2-X+2$, alors $3a_4+a_2-a_0 = 3-1-2 = 0$ et $a_3 = 0$, donc le système est compatible ($Q \in \operatorname{Im}(\Phi)$), et les antécédents de Q par Φ sont les $\boxed{\lambda+3\mu X+X^2+\left(\dfrac{1}{6}-\mu\right)X^3-\dfrac{X^4}{4}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$.

A8 $M_4 - 2I_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Un pivot de Gauss sur les lignes de $M_4 - 2I_5$ annule les lignes L_4 et L_5, donc $\mathrm{rg}(M_4 - 2I_5) = 3$, et $\dim(\mathrm{Ker}(M_4 - 2I_5)) = 5 - 3 = 2$.

Le système en (x, y, z, t, u) équivalent à $(x, y, z, t, u)^\top \in \mathrm{Ker}(M_4 - 2I_5)$ est $\begin{pmatrix} -x+z & = 0 \\ t & = 0 \\ u & = 0 \end{pmatrix}$, donc

$\boxed{\mathrm{Ker}(M_4 - 2I_5) = \mathrm{Vect}\left(X, 1 - X^2\right)}$.

Partie B

B1 Si f est ternaire, alors $f^3 = f \circ f^2 = \mathrm{id}_E$, donc f est inversible et $\boxed{f^2 = f^{-1}}$.

B2 Si f est anti-ternaire, alors $f^3 = -\mathrm{id}_E$ et $\left(f^2\right)^3 = \left(f^3\right)^2 = \left(-\mathrm{id}_E\right)^2 = \mathrm{id}_E$, donc $\boxed{f^2 \text{ est ternaire}}$.

B3 Si f est ternaire et que $n = \dim E$ est pair, alors $\det(f^3) = \det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^n = 1$, donc $\boxed{\det f = 1}$.

Si n est impair, alors $\det(f^3) = \det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^n = -1$, donc $\boxed{\det f = -1}$.

B4 Un calcul matriciel donne $A_2^2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ puis $A_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De même, $A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A_3^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont anti-ternaires}}$.

B5 Un calcul matriciel donne $Q_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc Q_3 est inversible et $Q_3^{-1} = Q_3$, puis $Q_3.A_3.Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = {A_3}^\top$, c'est-à-dire $Q_3.A_3.Q_3^{-1} = {A_3}^\top$.

Ainsi $\boxed{A_3 \text{ et } {A_3}^\top \text{ sont semblables.}}$

B6 $(-\mathrm{id}_E) = -\mathrm{id}_E$, donc $\boxed{-\mathrm{id}_E \text{ est antiternaire}}$.

Si $f^2 - f + \mathrm{id}_E = 0$, alors $(f + \mathrm{id}_E)\left(f^2 - f + \mathrm{id}_E\right) = f^3 - f^2 + f + f^2 - f + \mathrm{id}_E = f^3 + \mathrm{id}_E = 0$, donc $\boxed{f \text{ est anti-ternaire}}$.

B7 Supposons qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$, alors $f^3(x) = \lambda^3 x = -x$, donc $(\lambda^3 + 1)x = 0_E$; comme $x \neq 0_E$, $\lambda^3 - 1$ donc $\lambda = -1$; mais par hypothèse, $x \notin \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$, donc ceci est exclu.

Ainsi $(x, f(x))$ est libre ; supposons maintenant que $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est liée, alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f^2(x) = a\,x + b\,f(x)$. Par composition avec f : $-x = a\,f(x) + b\,f^2(x)$, donc $x + a\,f(x) + b\left(a\,x + b\,f(x)\right) = 0_E$, soit $(1 + a\,b)x + \left(a + b^2\right)f(x) = 0_E$. Comme $(x, f(x))$ est libre, $1 + a\,b = 0$ et $a + b^2 = 0$, soit $a = -b^2$ donc $1 - b^3 = 0$. On trouve donc $(a, b) = (-1, 1)$, donc $f^2(x) - f(x) + x = 0_E$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $\boxed{(x, f(x), f^2(x)) \text{ est un système libre}}$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, $f(f^2(x)) = f^3(x) = -x$ donc la matrice de f, construite colonne par colonne, est $\boxed{A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Partie C

C1 $\det(M_3) \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{pmatrix} = (a+b+c) \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} (a+b+c) \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-b \end{pmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)\left((a-b)(a-c) + (b-c)^2\right)$, et finalement

$\boxed{\det(M_3) = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2 - a\,b - a\,c - b\,c\right).}$

C2 ***a)*** $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, donc $j^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$, puis $j^2 = j^{-1}$. Enfin, $(j-1)\left(j^2+j+1\right) = j^3 - 1 = 0$ et $j - 1 \neq 0$, donc $1 + j + j^2 = 0$.

b) Comme $j^2 = \overline{j}$, $W = \overline{V}$ et $w = \overline{v}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & j & j^2 \\ 0 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{vmatrix} = 3(j^2 - j^4) = 3(j^2 - j) \neq 0.$

c) Par un calcul matriciel simple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} . (U|V|W) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+jb+j^2c & c \\ a+b+c & c+aj+bj^2 & a+bj^2+cj \\ a+bj^2+cj & b+cj+j^2a & ja+bj+j^2c \end{pmatrix}$$

$= ((a+b+c)U | (a+jb+j^2c)V | (a+bj^2+cj)W)$, donc : $\boxed{\alpha = a+b+c, \beta = a+jb+j^2c, \gamma = a+j^2b+jc}$.

d) Alors, avec $\boxed{P_3 = (U|V|W)}$, $P_3^{-1}.M_3.P_3 = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ (formule de changement de base), donc $\boxed{\det(M_3) = \alpha\,\beta\,\gamma}$.

C3 $\det(M_4) = \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}$

$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a+c-b+d & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & d-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-a & a-b \end{vmatrix}$

Finalement $\boxed{\det(M4) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\left(a^2+b^2+c^2 - ac - bc - ca\right)}$.

C4 ***a)*** En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de S, $C_2 = j\,C_1$ et $C_3 = j\,C_2 = j^2\,C_3$ donc $\boxed{S \text{ est de rang } 1}$.
Son image est une droite vectorielle engendrée par toute colonne non nulle de S, par exemple C_3.

b) $\dim \operatorname{Ker}(S) = 2$ d'après la formule du rang, et par ailleurs $S.C_1 = S.C_2 = (0)$, donc $\boxed{\operatorname{Ker}(S) = \operatorname{Vect}\left(C_1, C_2\right)}$.

Les coordonnées des vecteurs C_1 et C_2 vérifient $\boxed{x + j\,y + j^2\,z = 0}$, qui est donc une équation cartésienne du plan $\operatorname{Ker}(S)$.

c) On constate que les coordonnées de C_3 vérifient l'équation cartésienne de $\operatorname{Im}(S)$, donc $\boxed{\operatorname{Im}(S) \subset \operatorname{Ker}(S)}$ et donc $S^2 = (0)$, et par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{S^n = (0) \text{ pour } n \geqslant 2}$.

C5 ***a)*** $\det(u_1,u_2,u_3,u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1-i & -1 & i & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_4}{\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \rightleftharpoons L_2}{=}$

$4\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix}$

donc $\det(u_1,u_2,u_3,u_4) = -16i$ et $\boxed{(u_1,u_2,u_3,u_4) \text{ est une base de } \mathbb{C}^4}$.

Un calcul matriciel, laissé au lecteur, aboutit à $P_4.\overline{P_4} = 4\,I_4$, et alors $P4^{-1} = \dfrac{1}{4}\overline{P_4}$.

b) Un autre calcul matriciel donne $M_4.(U_1|U_2|U_3|U_4) = \left(\lambda_1\,U_1|\lambda_2\,U_2|\lambda_3\,U_3|\lambda_4\,U_4\right)$ avec $\lambda_1 = a+b+c+d, \lambda_2 = a+ib-c-id, \lambda_3 = a-b+c-d$ et $\lambda_4 = a-ib-\cancel{c+id}$.
En déduire que Alors, par changement de base, $\boxed{P_4^{-1}.M_4.P_4 = \operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\right).}$

c) Et ainsi $\det(M_4) = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4$.
En regroupant λ_2 et λ_4, on retrouve le résultat de la question **3**.