PT DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 1 07/09/2024

Ce devoir se compose de trois parties indépendantes — Calculatrices interdites

Partie A

A1 Rappeler l'ensemble de dérivabilité de la fonction arctan, et sa dérivée $\arctan'(x) = \cdots$.

A2 On considère la fonction définie par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de f, et son ensemble de dérivabilité. Montrer que f est impaire.

b) Calculer $f'(x)$ lorsqu'il existe. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}_-^*$?

A3 On considère les fonctions h, u et g définies par $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $u(x) = \sqrt{h(x)}$ et $g(x) = \arctan(u(x))$.

a) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions h, u, g.

b) Montrer que, pour tout x convenable, $h'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$; $u'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$; $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

c) Que peut-on dire de $g(x) - \frac{1}{2}\arccos x$ sur $]-1,1[$?

On rappelle les identités : $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + \cos(2t) = 2\cos^2 t$ et $1 - \cos(2t) = 2\sin^2 t$.

A4 Soit $x \in]-1,1[$, on pose $t = \frac{1}{2}\arccos x$ soit $x = \cos(2t)$.
Montrer que $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = |\tan t|$, et que $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t = \frac{1}{2}\arccos x$.

A5 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $c(\theta) = \cos(\arctan\theta)$ et $s(\theta) = \sin(\arctan\theta)$.
Montrer que $c(\theta) \geqslant 0$, que $\frac{s(\theta)}{c(\theta)} = \theta$ et que $c(\theta)^2 + s(\theta)^2 = 1$, et en déduire la valeur de $c(\theta)$.

A6 En utilisant les questions précédentes, montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$.

Partie B

B1 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$.

B2 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

B3 Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\exists T_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

ainsi que la relation de récurrence $\boxed{(\mathscr{R}_n) : \quad T_{n+1} = 2X\,T_n - T_{n-1}}$.

⚠attention, $T_n(\cos x)$ ne signifie pas $\cos x \times T_n(X)$, mais s'obtient en remplaçant X par $\cos x$ dans $T_n(X)$.

B4 Justifier que $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_2 = 2X^2 - 1$. Préciser T_3 et T_4.

B5 Montrer l'unicité du polynôme T_n défini par $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)$.
(Indication : on pourra procéder par l'absurde en supposant que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, il y a deux polynômes T_n et U_n de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient cette relation).

B6 Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que T_n est de degré n et a la même parité que n (c'est-à-dire T_n est pair si n est pair, et T_n est impair si n est impair).

B7 ***a)*** Montrer que $T_3 - T_2 = (4X^2 + 2X - 1)(X - 1)$, et en déduire les racines réelles de $T_3 - T_2$.

b) Montrer que les solutions réelles de $\cos(3t) = \cos(2t)$ sont les $t_k = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, et en déduire que les racines réelles de $T_3 - T_2$ sont les $\cos(t_k)$, $k \in [\![0,4]\!]$.

c) En déduire une expression de $\cos\frac{2\pi}{5}$ à l'aide de racines carrées.

Partie C

C1 Rappeler la formule du binôme de Newton pour les matrices carrées (avec ses hypothèses).

C2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu(n)$ le reste dans $[\![1,5]\!]$ de la division euclidienne de n par 5 ; on obtient alors le tableau

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$\mu(n)$	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	$\cdots$

On considère la matrice $J_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

φ_5 est l'endomorphisme associé à J_5 dans la base canonique $(e_1, \dots, e_5)$ de $\mathbb{R}^5$.

a) Peut-on dire, pour tout $j \in [\![1,5]\!]$: **A** $\varphi_5(e_j) = e_{\mu(j+2)}$; **B** $\varphi_5(e_j) = e_{\mu(j+1)}$; **C** $\varphi_5(e_j) = e_{\mu(j-2)}$? (une seule réponse vraie)

b) Montrer que $J_5^5 = I_5$ (matrice identité) et que $J_5^4 = J_5^{-1} = J_5^{\top}$.

c) On pose $G_5 = J_5 + J_5^{\top}$. Montrer que $G_5 = J_5\left(I_5 + J_5^3\right)$ et en déduire G_5^5 à l'aide du binôme de Newton.

C3 On considère les matrices $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On admettra que $K_3^2 = 3K_3$; montrer que $K_3^n = 3^{n-1}K_3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En remarquant que $U_3 = K_3 - I_3$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $U_3^n = (-1)^n I_3 + \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} K_3$.

C4 On considère

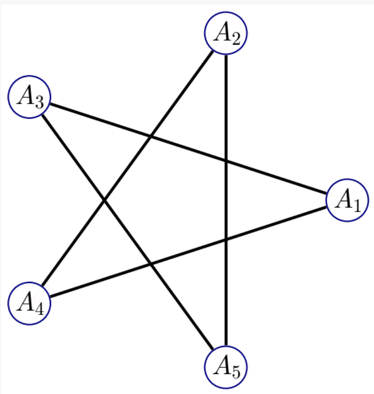
$$U_6 = \begin{pmatrix} U_3 & (0) \\ (0) & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ G_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

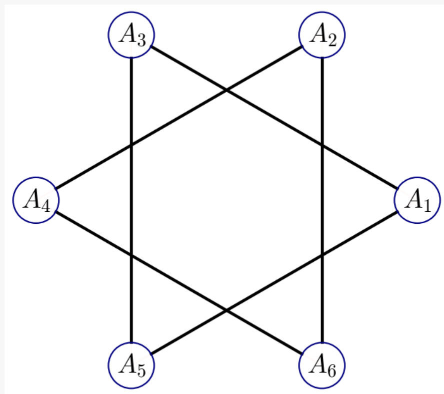
a) Si f_6 est l'endomorphisme associé à G_6 dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, quelle est la matrice de f_6 dans la base $(e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)$?

b) En déduire que $U_6 = P_6^{-1}.G_6.P_6$.

c) Calculer G_6^6.

C5 On rappelle qu'un ***graphe*** G est défini par un ensemble de n points du plan appelés sommets $(A_1, \dots, A_n)$ et reliés par des arêtes (par exemple A_1A_4 ou A_3A_2). Le nombre n de sommets est l'***ordre*** du graphe.
G peut être défini par une ***matrice d'adjacence*** : ainsi $M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice d'adjacence de G si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_iA_j \text{ est une arête de } G\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Soit les graphes S_5 et S_6 de représentations graphiques respectives :





Ces graphes sont *non orientés* : on ne distingue pas l'arête A_iA_j, de l'arête A_jA_i.
Ils sont *sans boucle* : ils ne contiennent aucune arête A_iA_i.
On admet que si M est la matrice d'adjacence du graphe G, et si $p \in \mathbb{N}^*$, alors le nombre de chemins du graphe G reliant le sommet A_i au sommet A_j en p étapes est le coefficient d'ordre (i,j) de la matrice M^p.

a) Écrire les matrices d'adjacence respectives M_5 et M_6 des graphes S_5 et S_6.

b) Déterminer le nombre de chemins reliant A_2 et A_3 en cinq étapes dans le graphe S_5.
Déterminer le nombre de chemins reliant A_2 et A_3 en six étapes dans le graphe S_6.