

PT**CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ NUMÉRO 1****07/09/2024****Partie A**

A1 arctan est (définie et) dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

A2 a) $f(x)$ est définie sur $x \in \mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. f est également dérivable par opérations sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et, comme arctan est impaire, $f(-x) = \arctan(-x) + \arctan \frac{1}{-x} = -\arctan x - \arctan \frac{1}{x} = -f(x)$, donc f est impaire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, f est constante sur tout intervalle où elle est dérivable, en particulier sur $]0, +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle).

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Par imparité, $\forall x \in \mathbb{R}_-, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

A3 a) h est définie et dérivable par opérations sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

u est définie sur toute partie de $\mathcal{D}_h$ où $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}_u =]-1, 1]$, car $h(x)$ a le signe de $1-x^2$;

u est dérivable sur toute partie de $\mathcal{D}_h$ où $h(x) > 0$, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}'_u =]-1, 1[$.

Comme u , g est définie sur $\mathcal{D}_g =]-1, 1]$, et dérivable sur $\mathcal{D}'_g =]-1, 1[$.

b) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[, h(x) = \frac{2-(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} - 1$ donc $h'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$.

$u = \sqrt{h}$ donc $u' = \frac{h'}{2\sqrt{h}}$; $\forall x \in]-1, 1[, u'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{1+x} \frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ donc

$u'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. Enfin $g' = \frac{u'}{1+u^2}$; mais, pour $x \in]-1, 1[, 1+u(x)^2 = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$; $g'(x) =$

$\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \frac{1+x}{2}$ donc $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

c) La dérivée de $x \mapsto -\arccos x$ sur $] -1, 1[$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc en posant $\delta(x) = g(x) - \frac{1}{2} \arccos x$, $\delta'(x) = 0$

sur $] -1, 1[$; par ailleurs $\delta(0) = \arctan(1) - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = 0$; δ est nulle sur $] -1, 1[$. $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \frac{1}{2} \arccos x$.

A4 Si $x = \cos(2t)$, $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)} = \frac{2\sin^2 t}{2\cos^2 t} = \tan^2 t$, donc $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = |\tan t|$.

Puisque $t = \frac{1}{2} \arccos x$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\tan t \geq 0$, et alors $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arctan \tan t = t$ et finalement

$g(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t = \frac{1}{2} \arccos x$. On retrouve le résultat de la question **3 c)**.

A5 Puisque $\arctan \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $c(\theta) = \cos \arctan \theta \geq 0$. De plus, $\frac{s(\theta)}{c(\theta)} = \tan \arctan \theta = \theta$, et

$c(\theta)^2 + s(\theta)^2 = \cos^2 \arctan \theta + \sin^2 \arctan \theta = 1$. Alors $c(\theta)^2 + s(\theta)^2 = (1+\theta^2)c(\theta)^2 = 1$, donc $c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$.

A6 D'après la question **4**, en prenant $\theta = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\frac{1}{2} \arccos x = \arctan \theta$; or $1+\theta^2 = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$, donc

d'après **5**: $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = c(\theta) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

Partie B

- B1** On sait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, donc $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$.
En prenant $a = nx$ et $b = x$, on trouve $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2 \cos x \cos(nx)$.
- B2** $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$, et en utilisant le résultat de **B1**, $\cos(3x) - \cos x = 2 \cos x \cos(2x) = 4 \cos^3 x - 2 \cos x$, et on en déduit $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
- B3** $\mathcal{R}_0$ est vraie avec $T_0 = 1$ car $\cos(0x) = 1$, et $\mathcal{R}_1$ est vraie avec $T_1 = X$ car $\cos(1.x) = \cos x$.
Supposons $\mathcal{R}_{n-1}$ et $\mathcal{R}_n$ vraies, alors pour tout réel x :
 $\cos((n+1)x) = 2 \cos x \cos(nx) - \cos((n-1)x) = 2 \cos x T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$, donc en posant $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$ qui est un polynôme, on trouve bien $\mathcal{R}_{n+1}$: $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos x)$.
Le principe de récurrence double permet de conclure.
- B4** $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ sont clairs.
De **B2** : $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ et $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, on tire $T_2 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 4X^3 - 3X$.
Enfin $T_4 = 2X T_3 - T_2 = 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1$ donc $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
- B5** Supposons que pour n fixé, il existe deux polynômes T_n et U_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x) = U_n(\cos x)$; alors $\forall y \in [-1, 1], T_n(y) - U_n(y) = 0$, donc le polynôme $U_n - T_n$ admet une infinité de racines. Il est forcément nul, d'où l'unicité du polynôme T_n .
- B6** $T_0 = 1$ est pair, et de degré 0 et $T_1 = X$ est impair, et de degré 1.
Supposons alors que T_n est de degré n et T_{n-1} de degré $n-1$; $2X T_n$ est de degré $n+1$, donc $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$ est de degré $n+1$.
Supposons que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ et $T_{n-1}(-X) = (-1)^{n-1} T_{n-1}(X)$; alors $T_{n+1}(-X) = -2X T_n(-X) - T_{n-1}(-X) = (-1)^{n+1} (2X T_n(X) - T_{n-1}(X)) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(X)$, donc T_{n+1} a la parité de $n+1$.
Finalement, par récurrence double, T_n est de degré n et a la même parité que n .
- B7** a) $T_3 - T_2 = 4X^3 - 3X - 2X^2 + 1 = 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (4X^2 + 2X - 1)(X - 1)$.
Or le discriminant de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ est $\Delta = 4 - (-1) \times 4 \times 4 = 4 \times 5 > 0$, donc l'équation du second degré a deux racines $X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.
Les racines réelles de $T_3 - T_2$ sont dans l'ordre croissant : $\left(X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, X_3 = 1 \right)$.
- b) $\cos(3t) = \cos(2t)$ équivaut à
$$\begin{cases} 3t = 2t + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3t = -2t + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ soit } \begin{cases} t = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5t = 2k\pi \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} t = 2k\pi \\ \text{ou} \\ t = 2k \frac{\pi}{5} \end{cases}.$$

Finalement, les solutions réelles de $\cos(3t) = \cos(2t)$ sont les $t_k = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
- c) En posant $u = \cos t$, $\cos(3t) - \cos(2t) = T_3(u) - T_2(u)$, donc d'après la question précédente **B7 b)**, les racines de $T_3 - T_2$ sont les $\cos \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
Comme $\cos(-u) = \cos(u)$ que $\cos$ est 2π -périodique, on obtient trois racines distinctes, par ordre croissant : $\left(\cos \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}, 1 \right)$.
Par comparaison avec le résultat de la question **B7 a)**, $\cos \frac{2\pi}{5} = X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Partie C

- C1** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A.B = B.A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k . B^{n-k}$.
- C2** a) $\varphi_5(e_1) = e_3 = e_{\mu(3)}, \varphi_5(e_2) = e_4 = e_{\mu(4)}, \varphi_5(e_3) = e_5 = e_{\mu(5)}, \varphi_5(e_4) = e_1 = e_{\mu(6)}, \varphi_5(e_5) = e_2 = e_{\mu(7)}$, donc $\varphi_5(e_j) = e_{\mu(j+2)}$ pour $1 \leq j \leq 5$.

b) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $\varphi_5^k(e_j) = e_{\mu(j+2k)}$.

En particulier, $\varphi_5(e_j) = e_{\mu(j+10)} = e_j$ donc $\varphi_5^5 = \text{id}$ et $J_5^5 = I_5$; c'est-à-dire que $J_5 J_5^4 = I_5$, donc $J_5^4 = J_5^{-1}$.

Alors $\varphi_5^4(e_j) = e_{\mu(j-2)}$, ce qui permet d'écrire la matrice de $J_5^4 = J_5^{-1}$ et de vérifier que $J_5^4 = J_5^{-1} = J_5^T$.

c) $G_5 = J_5 + J_5^T = J_5 + J_5^4 = J_5(I_5 + J_5^3)$; or I_5 et J_5 commutent, donc $G_5^5 = J_5^5(I_5 + J_5^4)^5 = (I_5 + J_5^4)^5$.

La formule du binôme de Newton donne alors :

$$G_5^5 = I_5 + 5J_5^4 + 10J_5^8 + 10J_5^{12} + 5J_5^{16} + J_5^{20} = I_5 + 5J_5^T + 10J_5^3 + 10J_5^2 + 5J_5 + I_5 = 2I_5 + 5G_5 + 10(J_5^2 + J_5^T).$$

Finalement :

$$G_5^5 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 2 & 5 & 10 \\ 10 & 10 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

C3 a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $Q_n : K_3^n = 3^{n-1}K_3$. Comme $K_3^1 = K_3$ et que $3^{1-1}K_3 = K_3$, Q_1 est vérifiée. Supposons Q_n vraie; alors $K_3^{n+1} = K_3^n \cdot K_3 = 3^{n-1}K_3 \cdot K_3 = 3^{n-1} \cdot 3K_3 = 3^{n+1-1}K_3$, donc Q_{n+1} est vérifiée. Ceci établit Q_n par récurrence.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $M_n : U_3^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} K_3$.

Comme $U_3^0 = I_3$ et que $(-1)^0 I_3 + \frac{2^0 - (-1)^0}{3} K_3 = I_3$, M_0 est vraie.

Supposons M_n vraie, alors $U_3^{(n+1)} = U_3 \cdot U_3^n = (K_3 - I_3) \left((-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} K_3 \right) = (-1)^n K_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} K_3^2 - (-1)^n I_3 - \frac{2^n - (-1)^n}{3} K_3 = (-1)^{n+1} I_3 + \frac{1}{3} (3(2^n - (-1)^n) + 3(-1)^n - (2^n - (-1)^n)) K_3 = (-1)^{n+1} I_3 + \frac{1}{3} (2 \cdot 2^n + (-1)^n) K_3$, ce qui établit M_{n+1} . M_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

C4 a) $f_6(e_1) = e_3 + e_5$, $f_6(e_3) = e_1 + e_5$, $f_6(e_5) = e_1 + e_3$, $f_6(e_2) = e_4 + e_6$, $f_6(e_4) = e_2 + e_6$, et $f_6(e_6) = e_2 + e_4$.

Donc la matrice de f_6 dans la base $(e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)$ est U_6 .

b) On reconnaît en P_6 la matrice du changement de base de la base canonique vers la base $(e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)$. Alors, d'après la formule de changement de base : $U_6 = P_6^{-1} \cdot G_6 \cdot P_6$.

c) Mais alors $G_6 = P_6 \cdot U_6 \cdot P_6^{-1}$, donc $G_6^6 = P_6 \cdot U_6^6 \cdot P_6^{-1}$; or $U_6^6 = \begin{pmatrix} U_3^6 & (0) \\ (0) & U_3^6 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, d'après **3 b)**, $U_3^6 = I_3 + \frac{2^6 - 1}{3} K_3 = I_3 + 21 K_3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$.

En appelant ψ_6 l'endomorphisme associé à U_6^6 dans la base $(e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)$, on écrit $\psi_6(e_1) = 22e_1 + 21e_3 + 21e_5$, $\psi_6(e_3) = 22e_3 + 21e_1 + 21e_5$, $\psi_6(e_5) = 22e_5 + 21e_1 + 21e_3$, $\psi_6(e_2) = 22e_2 + 21e_4 + 21e_6$, $\psi_6(e_4) = 21e_2 + 22e_4 + 21e_6$, $\psi_6(e_6) = 21e_2 + 21e_4 + 22e_6$; ainsi, la matrice de ψ_6 dans la base canonique est

$$G_6^6 = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 21 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 21 & 0 & 21 \\ 21 & 0 & 22 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 22 & 0 & 21 \\ 21 & 0 & 21 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 21 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

C5 a) S_5 contient les arêtes $A_1 A_3, A_3 A_1, A_3 A_5, A_5 A_3, A_5 A_2, A_2 A_4, A_4 A_1$ et $A_1 A_4$, donc la matrice d'adjacence de S_5 est $M_5 = G_5$.

De manière analogue $M_6 = G_6$.

b) Comme le coefficient d'ordre (2, 3) de M_5^5 est 5, il y a 5 chemins reliant A_2 et A_3 en cinq étapes dans le graphe S_5 .

Comme le coefficient d'ordre (2, 3) de M_6^6 est 0, il y a 0 chemin reliant A_2 et A_3 en cinq étapes dans le graphe S_6 . On pouvait s'en douter, puisque le graphe S_6 admet deux composantes connexes, donc A_2 ne peut pas être relié à A_3 .