PT **CONCOURS BLANC MATHS C** **12/03/2025**

Calculatrices interdites
Le problème se compose de trois parties indépendantes.

Partie A

1 Justifier la convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

On pose $A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $B = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, et on admet que $A = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Montrer que $A + B = \dfrac{1}{2}A$, et en déduire la valeur de B.

2 Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$?

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

3 Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?
Énoncer le théorème qui permet d'affirmer que f est continue sur $[-1,1]$.

4 Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$, et exprimer $f'(x)$ comme une somme de série, puis à l'aide de fonctions élémentaires pour $x \in]-1,1[$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

5 Justifier la convergence des intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$ et préciser leur valeur.

Partie B

1 Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

2 Montrer, à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{d}u}{1+u^4}$.

3 Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $\varphi : t \mapsto t - \dfrac{1}{t}$.

À l'aide du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{t}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}$; déterminer la valeur de cette dernière intégrale.

4 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

5 À l'aide d'un changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_1^{+\infty} \frac{u^2\mathrm{d}u}{1+u^4}$, et en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = (-1)^n t^{4n}$.

6 Justifier par un résultat de cours *(à énoncer)* la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$.

7 Calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ en fonction de n.

8 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \frac{1}{1+t^4} - (-1)^{n+1}\frac{t^{4n+4}}{1+t^4}$.

9 Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{4n+4}}{1+t^4} \leqslant t^{4n+4}$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^4}\mathrm{d}t = 0$.

10 Déduire des questions précédentes que $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

11 À l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$ à l'aide d'une intégrale.

12 Utiliser les résultats des questions **10**, **11**, **4** et **5** pour déterminer la valeur de $S_1 + S_2$.

Partie C

On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

1 Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $F(0)$?

2 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3 À l'aide de l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt}$, montrer que pour $x > 0$: $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, et $I =]\varepsilon, +\infty[$; montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, et exprimer sa dérivée seconde $F''(x)$ comme une intégrale.

5 En déduire que, pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x)\cos(x) + g'(x)\sin(x) = 0 \qquad (1),$$

et l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}. \qquad (E)$$

6 En posant $y(x) = f(x)\cos(x) + g(x)\sin(x)$, calculer $y'(x)$ à l'aide des fonctions cos, sin, f, f', g et g', puis en tenant compte de (1), à l'aide des seules fonctions cos, sin, f et g.
En déduire que y est de classe $\mathscr{C}^2$, et donner une expression de $y''(x)$.

7 Déduire de la question précédente que y est solution de (E) si, et seulement si, f' et g' vérifient le système :

$$\begin{cases} (1) \quad f'(x)\cos(x) + g'(x)\sin(x) = 0 \\ (2) \quad -f'(x)\sin(x) + g'(x)\cos(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Déterminer f' et g' qui vérifient (Σ).

8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, en conclure que les solutions de (E) sont de la forme
$x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x \frac{\sin(x-t)}{t}\,dt + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$, C_1 et C_2 étant deux constantes réelles.

9 En posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.
Montrer de même que $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge, et en déduire la convergence pour tout $x > 0$ de

$$y_0(x) = \sin(x)\int_{+\infty}^x \frac{\cos t}{t}\,dt - \cos(x)\int_{+\infty}^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{+\infty}^x \frac{\sin(x-t)}{t}\,dt.$$

10 Montrer à l'aide des deux questions précédentes que y_0 est la seule solution de (E) qui admette une limite finie en $+\infty$.

11 En conclure que $y_0(x) = F(x)$ pour tout $x \geqslant 0$, puis que $A = \dfrac{\pi}{2}$.