PT

CORRIGÉ DU CONCOURS BLANC MATHS C

12/03/2025

Calculatrices interdites

Le problème se compose de trois parties indépendantes.

Partie A

1 Justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

On pose $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, et on admet que $A = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que $A + B = \frac{1}{2}A$, et en déduire la valeur de B .

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées (on peut aussi remarquer qu'elle est absolument convergente).

$$A + B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=2p, p=1}^{+\infty} \frac{1+1}{(2p)^2} + \sum_{n=2q, q=0}^{+\infty} \frac{1-1}{(2q+1)^2} = \frac{2}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + 0; \text{ ainsi}$$

$$\boxed{A + B = \frac{A}{2}}, \text{ donc } B = \left(\frac{1}{2} - 1\right)A = \frac{-A}{2}; \quad \boxed{B = \frac{-\pi^2}{12}}.$$

2 Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$?

$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} n^2 \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n \geq 1} x^n$, c'est-à-dire $\boxed{R = 1}$.

On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3 Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?

Énoncer le théorème qui permet d'affirmer que f est continue sur $[-1, 1]$.

$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$ d'après **1** et **2**.

D'après le cours, f est continue sur son domaine de définition $[-1, 1]$.

4 Justifier que f est dérivable sur $] - 1, 1[$, et exprimer $f'(x)$ comme une somme de série, puis à l'aide de fonctions élémentaires pour $x \in] - 1, 1[$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt$.

D'après le cours, f est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $] - 1, 1[$, et pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}; \text{ pour } x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}, \quad \boxed{f'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}}.$$

5 Justifier la convergence des intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt$ et $I_2 = \int_{-1}^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt$ et préciser leur valeur.

$h : t \mapsto \frac{-\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, et ce prolongement est continu sur $[-1, 1[$. De plus,

h est positive sur $[-1, 1[$, et $h(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-t)$; comme $\int_0^1 \ln(1-t) dt$ converge, $\boxed{I_1 \text{ et } I_2 \text{ convergent}}$.

De plus, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $\int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = f(x) - f(0) = f(x)$ en intégrant la relation obtenue dans la question **4**; comme les deux fonctions égalisées sont continues sur $[-1, 1]$, cette relation peut être étendue

au segment $[-1, 1]$, donc $\boxed{I_1 = f(1) = \frac{\pi^2}{6}}$, et $I_2 = \int_0^1 \frac{-\ln(1-t)}{t} dt - \int_0^{-1} \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = f(1) - f(-1) =$

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{12} \text{ et finalement } \boxed{I_2 = \frac{\pi^2}{4}}.$$

Partie B

1 Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

$t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est continue (et positive) sur $\mathbb{R}$; de plus $\frac{1}{1+t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$; or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ converge comme intégrale de Riemann (avec $\alpha = 4 > 1$). En appliquant le théorème de comparaison par équivalent, on trouve que I converge.

2 Montrer, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4}$.

$t \mapsto u = \frac{1}{t}$ est décroissante et $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même; de plus, $dt = -\frac{du}{u^2}$, et $\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}} = \frac{u^4}{1+u^4}$,

donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_{+\infty}^0 \frac{u^4}{1+u^4} \frac{-du}{u^2}$ donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4}$.

3 Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $\varphi : t \mapsto t - \frac{1}{t}$.

À l'aide du changement de variable $u = t - \frac{1}{t}$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2}$; déterminer la valeur de cette dernière intégrale.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour $t > 0$: $\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$, donc φ est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, car $-\infty = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t)$ et $+\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$.

Le changement de variable $u = t - \frac{1}{t}$ est donc croissante et $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$; $du = \frac{t^2+1}{t^2} dt$, et

$2+u^2 = 2 + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 2 + t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = t^2 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^4+1}{t^2}$, donc $\frac{du}{u^2+2} = \frac{t^2}{t^4+1} \frac{t^2+1}{t^2} dt = \frac{t^2+1}{t^4+1} dt$, ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2}$$

4 En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

Commençons par calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2}$, en posant par exemple $u = v\sqrt{2}$ donc $du = \sqrt{2}dv$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}dv}{2v^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2+1}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Par ailleurs, d'après la question **2** :

$2I = I + \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2)du}{1+u^4}$ qui vaut $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ d'après la question **3**. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5 À l'aide d'un changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \int_1^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4}$, et en déduire que $\int_0^1 \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

En appliquant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ comme dans la question **2**, on obtient :

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \int_{+\infty}^1 \frac{-u^2 du}{1+u^4} = \int_1^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4}$; on rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} + \int_1^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = 2 \int_0^1 \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4}$, donc $\int_0^1 \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{1+t^4} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = (-1)^n t^{4n}$.

6 Justifier par un résultat de cours (à énoncer) la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Le théorème des séries alternées stipule que si (u_n) est une suite décroissante de limite nulle (donc à termes positifs), alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Il s'applique clairement à $u_n = \frac{1}{4n+1}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge.

7 Calculer $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ en fonction de n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 (-1)^n t^{4n} dt = (-1)^n \left[\frac{t^{4n+1}}{4n+1} \right]_0^1$, donc

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

8 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n f_k(t) = \frac{1}{1+t^4} - (-1)^{n+1} \frac{t^{4n+4}}{1+t^4}$.

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (somme des termes d'une suite géométrique), donc en

posant $q = -t^4$:
$$\sum_{k=0}^n f_k(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{4k} = \frac{1}{1+t^4} - \frac{(-1)^{n+1} t^{4n+4}}{1+t^4}.$$

9 Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} \leq t^{4n+4}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} dt = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^4 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$ et ainsi $0 \leq \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} \leq t^{4n+4}$ et par intégration entre 0 et 1 :

$$0 \leq \int_0^1 t^{4n+4} dt \leq \int_0^1 t^{4n+4} dt = \left[\frac{t^{4n+5}}{4n+5} \right]_0^1 = \frac{1}{4n+5}.$$

Le théorème d'encadrement montre alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} dt = 0$.

10 Déduire des questions précédentes que $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$.

par intégration entre 0 et 1 du résultat de la question **8** :

$$\sum_{k=0}^n \int_0^1 f_k(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} + R_n \text{ avec } R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} dt, \text{ mais d'après la question } \mathbf{9} :$$

$$\int_0^1 f_k(t) dt = \frac{1}{4k+1} \text{ et d'après la question } \mathbf{9} : \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

Alors par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$) :
$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}.$$

11 À l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$ à l'aide d'une intégrale.

Reprenons le résultat de la question **8** : $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{4k} = \frac{1}{1+t^4} - \frac{(-1)^{n+1} t^{4n+4}}{1+t^4}$, en le multipliant par t^2 :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{4k+2} = \frac{t^2}{1+t^4} - \frac{(-1)^{n+1} t^{4n+6}}{1+t^4}.$$

Par intégration entre 0 et 1 :
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4k+3} = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{4n+6}}{1+t^4} dt.$$

Comme à la question **9**, $0 \leq \frac{t^{4n+6}}{1+t^4} \leq t^{4n+6}$ donc $\left| \int_0^1 \frac{t^{4n+6}}{1+t^4} dt \right| \leq \frac{1}{4n+7}$, et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+6}}{1+t^4} dt = 0$.

On en conclut que
$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3} = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^4}.$$

12 Utiliser les résultats des questions **10**, **11**, **4** et **5** pour déterminer la valeur de $S_1 + S_2$.

Par addition de **10** et **11** : $S_1 + S_2 = \int_0^1 \frac{(1+t^2)}{1+t^4} dt$; mais d'après la question **5**,

$$\int_0^1 \frac{(1+t^2)}{1+t^4} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \text{ et d'après la question } \mathbf{4} : \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \text{ Finalement } \boxed{S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

Partie C

On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1 Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $F(0)$?

Pour $x \geq 0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$; or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge (soit par intégration directe : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \pi$, soit par comparaison (équivalent) avec une intégrale de Riemann convergente. Alors $\boxed{\text{pour } x \geq 0, F(x) \text{ converge}}$ par comparaison ($\geq$).

De plus, on a vu ci-dessus que $\boxed{F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi}$.

2 Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, et $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

De plus, l'encadrement utilisé dans la question précédente $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ constitue une hypothèse de domination, ce qui justifie $\boxed{\text{la continuité de } F \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

3 À l'aide de l'encadrement $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$, montrer que pour $x > 0$: $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

En intégrant l'encadrement $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$ par rapport à t entre 0 et $+\infty$, pour $x > 0$:

$$0 \leq F(x) \leq \left[\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}. \text{ Le théorème d'encadrement donne alors } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}.$$

4 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, et $I =]\varepsilon, +\infty[$; montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , et exprimer sa dérivée seconde $F''(x)$ comme une intégrale.

$$x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}.$$

On en déduit que pour tous $x \in I$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\varepsilon t}$; mais $t \mapsto e^{-\varepsilon t}$ est réputée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc ceci constitue une hypothèse de domination, ce qui garantit le caractère $\mathcal{C}^2$ de F sur I , avec

$$\boxed{F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt}.$$

Ceci est vrai sur l'ensemble $I =]\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

5 En déduire que, pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.

On obtient alors pour $x > 0$: $F(x) + F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ donc finalement

$$\boxed{F(x) + F''(x) = \frac{1}{x}}.$$

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) \cos(x) + g'(x) \sin(x) = 0 \tag{1},$$

et l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}. \tag{E}$$

6 En posant $y(x) = f(x) \cos(x) + g(x) \sin(x)$, calculer $y'(x)$ à l'aide des fonctions $\cos, \sin, f, f', g$ et g' , puis en tenant compte de (1), à l'aide des seules fonctions $\cos, \sin, f$ et g .
 En déduire que y est de classe $\mathcal{C}^2$, et donner une expression de $y''(x)$.
 On obtient d'abord : $y'(x) = -f(x) \sin(x) + g(x) \cos(x) + f'(x) \cos(x) + g'(x) \sin(x)$, puis en tenant compte de (1) : $y'(x) = -f(x) \sin(x) + g(x) \cos(x)$, qui est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$; ainsi y est $\mathcal{C}^2$, et pour $x > 0$:

$$y''(x) = -f(x) \cos(x) - g(x) \sin(x) - f'(x) \sin(x) + g'(x) \cos(x).$$

7 Déduire de la question précédente que y est solution de (E) si, et seulement si, f' et g' vérifient le système :

$$\begin{cases} (1) & f'(x) \cos(x) + g'(x) \sin(x) = 0 \\ (2) & -f'(x) \sin(x) + g'(x) \cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Déterminer f' et g' qui vérifient (Σ) .

D'après le résultat de la question précédente, $y''(x) + y(x) = -f'(x) \sin(x) + g'(x) \cos(x)$, donc $y(x) = f(x) \cos(x) + g(x) \sin(x)$ est solution de (E) si et seulement si (1) et (2) : $-f'(x) \sin(x) + g'(x) \cos(x) = \frac{1}{x}$,

d'où le système (Σ) :
$$\begin{cases} (1) & f'(x) \cos(x) + g'(x) \sin(x) = 0 \\ (2) & -f'(x) \sin(x) + g'(x) \cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\cos x(1) - \sin x(2)$ donne $(\cos^2(x) + \sin^2(x))f'(x) + 0 = \frac{-\sin(x)}{x}$;
 $\sin x(1) + \cos x(2)$ donne $0 + (\cos^2(x) + \sin^2(x))g'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, donc les solutions de (Σ) sont

$$(f'(x), g'(x)) = \left(\frac{-\sin(x)}{x}, \frac{\cos(x)}{x} \right).$$

8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, en conclure que les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, C_1 et C_2 étant deux constantes réelles.
 Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont de la forme $x \mapsto C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
 Il reste donc à trouver une solution particulière. Les questions précédentes suggèrent $y_0 : x \mapsto f(x) \cos(x) + g(x) \sin(x)$, avec $f(x) = -\int_{\alpha}^x \frac{\sin t}{t} dt$ et $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{\cos t}{t} dt$, donc par linéarité

$$y_0(x) = \int_{\alpha}^x \frac{-\cos x \sin t + \sin x \cos t}{t} dt = \int_{\alpha}^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt.$$

On en conclut que les solutions de (E) sont $x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

9 En posant $u(t) = 1 - \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
 Montrer de même que $B = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ converge, et en déduire la convergence pour tout $x > 0$ de

$$y_0(x) = \sin(x) \int_{+\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt - \cos(x) \int_{+\infty}^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_{+\infty}^x \frac{\sin(x-t)}{t} dt.$$

En posant $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = 1 - \cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$,

$uv(t) = \frac{1 - \cos t}{t} = \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))}{t} = \frac{1}{2} + o(t)$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} uv(t) = 0$; de plus, $0 \leq uv(t) \leq \frac{2}{t^2}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv(t) = 0$ par encadrement. On en déduit que le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge et vaut 0, ce qui autorise à effectuer l'intégration par parties : $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0 - \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos t}{t^2} dt$, cette dernière intégrale étant convergente puisque $\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t}$.

A converge donc.

En posant $\begin{cases} u'(t) = \cos t \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = \sin t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$, $uv(t) = \frac{\sin t}{t}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv(t) = 0$ donc le crochet $[uv]_1^{+\infty}$

converge et vaut 0, ce qui autorise à effectuer l'intégration par parties :

$B = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = [uv]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \sin(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$, cette dernière intégrale étant absolument convergente. B converge donc.

Par linéarité, on en déduit la convergence pour tout $x > 0$ de $-\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-\cos x \sin t + \sin x \cos t}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x - t)}{t} dt : y_0$ converge.

10 *Montrer à l'aide des deux questions précédentes que y_0 est la seule solution de (E) qui admette une limite finie en*

$+\infty$.
 $y_0 : x \mapsto f(x) \cos(x) + g(x) \sin(x)$, avec $f'(x) = \frac{-\sin(x)}{x}$ et $g'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, est une solution de (E); de plus, en tant que reste d'une intégrale convergente, $\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = 0$.

Comme les autres solutions de (E) sont de la forme $y_0 + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ où $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$, elles n'ont pas de limite en $+\infty$.

y_0 est la seule solution de (E) qui admette une limite finie en $+\infty$.

11 *En conclure que $y_0(x) = F(x)$ pour tout $x \geq 0$, puis que $A = \frac{\pi}{2}$.*

D'après les questions de 1 à 5, F est une solution de (E) telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, donc

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* y_0(x) = F(x)$; par continuité de F et y_0 en 0_+ , $A = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = F(0) = \frac{\pi}{2}$.