PT **CONCOURS BLANC MATHS B** **10/03/2025**

Calculatrices interdites
Le problème se compose de quatre parties indépendantes.

Partie A

On considère la matrice $$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1 Sans calcul, justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2 En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de M, calculer $C_1 + C_2 + C_3$ et $C_1 - C_3$.
En déduire deux vecteurs propres de M et les valeurs propres associées.

3 Achever la diagonalisation de M.
On déterminera une matrice orthogonale P telle que $P^{\top}.M.P$ est diagonale, de coefficients diagonaux strictement croissants, à préciser.

4 Expliquer comment déterminer une matrice X symétrique, de valeurs propres strictement positives, telle que $X^2 = M$ (on ne demande pas le calcul explicite des coefficients de X).

Partie B

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit m un réel, et $\mathscr{C}_m$ la conique d'équation cartésienne
$$(m-1)x^2 + (m-1)y^2 + 2(m+1)xy + 2\sqrt{2}(m+1)x + 2\sqrt{2}(m-1)y + 2m = 0. \qquad (E)$$

1 Écrire la matrice symétrique S_m, associée à l'équation de $\mathscr{C}_m$, et préciser en fonction de m le *type* de $\mathscr{C}_m$ (hyperbole, parabole ou ellipse).

2 Préciser l'équation de $\mathscr{C}_{-1}$, et en déduire sa *nature*.

3 Diagonaliser la matrice S_m ; déterminer une matrice de rotation R, indépendante de m, telle que $R.S_m.R^{\top}$ soit diagonale, de coefficients diagonaux α et β.
On précisera la valeur de α et β, ainsi que l'angle de R.

4 Si on pose $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = R.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, montrer que (E) se ramène à
$$-2x_1^2 + 4x_1 + 2m y_1^2 + 4m y_1 + 2m = 0 \qquad (E_1)$$

5 Déterminer les réels a et b tels que, après la translation $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, l'équation (E_1) devient :
$$x_2^2 - m y_2^2 = K \qquad (E_2)$$
On précisera les valeurs de a, b et K.

6 Déduire de la question précédente la nature de $\mathscr{C}_0$, et celle de $\mathscr{C}_1$.

7 Montrer que les coniques $\mathscr{C}_m$ ont un centre commun Ω, dont on déterminera les coordonnées dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Montrer que les points M_1 et M_2, définis respectivement par $(x_2, y_2) = (1, 0)$ et $(x_2, y_2) = (-1, 0)$, appartiennent à toutes les coniques $\mathscr{C}_m$; préciser les coordonnées de M_1 et M_2 dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie C

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ paramétrée par $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta$.

1 Montrer que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est orthonormée ; calculer les dérivées $\vec{u}_\theta'$ et $\vec{v}_\theta'$.
Déterminer le vecteur dérivé $\overrightarrow{M}'(\theta)$, et montrer que sa norme vérifie $\left\|\overrightarrow{M}'(\theta)\right\|^2 = (f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2$

À partir d'ici, on prendra $f(\theta) = \cos\theta$.

2 Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ et le vecteur tangent $\vec{T}$ (On pourra utiliser le résultat de la question **1**).

3 Montrer que $\vec{T} = \vec{v}_{2\theta} = \vec{u}_{2\theta+\frac{\pi}{2}}$, et en déduire l'angle $\alpha = \widehat{\left(\vec{\imath}, \vec{T}\right)}$ en fonction de θ.

4 Déduire des questions précédentes que $R = \dfrac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur la nature de la courbe $\mathscr{C}_f$?

5 Soit $(x(\theta), y(\theta))$ les coordonnées de $M(\theta)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Simplifier $\left(x(\theta) - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y(\theta)^2$ et retrouver le résultat de la question précédente.

Partie D

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour $\in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(u^2)\mathrm{d}u$ et $\sigma(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u$.
Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on considère la courbe $\mathscr{S}$ de point courant $M(t)$, de coordonnées $(x(t) = \gamma(t), y(t) = \sigma(t))$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 En posant $f(\theta) = 1 - \cos\theta$ et $g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}}$, effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $J_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}t$ (on justifiera l'existence des intégrales et crochets apparaissant dans le calcul).
En déduire la convergence de J_2.
Procéder au calcul analogue pour $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}t$ (on posera cette-fois-ci $f(\theta) = \sin\theta$ et $g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}}$), et en déduire la convergence de J_1.

2 À l'aide d'un changement de variable $\theta = u^2$, montrer la convergence des intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u$. (On admettra par la suite que $I_1 = I_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$).

3 Préciser la parité de γ et de σ, et en déduire une symétrie de la courbe $\mathscr{S}$. Sur quel intervalle étudier $\mathscr{S}$?

4 Que valent $\gamma'(t)$ et $\sigma'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ et $\beta_n = \sqrt{n\pi}$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, montrer que $\gamma'(\alpha_n) = \sigma'(\beta_n) = 0$ et exprimer $\gamma'(\beta_n)$ et $\sigma'(\alpha_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Que peut-on en déduire concernant les tangentes aux points $A_n = M(\alpha_n)$ et $B_n = M(\beta_n)$?

5 Soit $n \in \mathbb{N}$, recopier et compléter le tableau suivant (NE=Nord-Est, SO=Sud-Ouest *etc.*) :

t	β_{2n}		α_{2n}		β_{2n+1}		α_{2n+1}		β_{2n+2}
t^2	$2n\pi$		$2n\pi + \frac{\pi}{2}$		$2n\pi + \pi$		$2n\pi + \frac{3\pi}{2}$		$2n\pi + 2\pi$
$\gamma'(t)$	1	+	0	?	?	?	?	?	?
$\sigma'(t)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?
$\gamma(t)$		$\nearrow$		?		?		?	
$\sigma(t)$		$\nearrow$		?		?		?	
direction		NE		?		?		?	

6 Pour $m \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide du changement de variable $x = u^2 - m\pi$ que
$\gamma(\alpha_{m+1}) - \gamma(\alpha_m) = (-1)^m \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + m\pi}}\mathrm{d}x$;
en déduire que $(\gamma(\alpha_{2m+1}))$ et $(\gamma(\alpha_{2m}))$ sont des suites adjacentes.
Montrer de même que $(\sigma(\beta_{2m+1}))$ et $(\sigma(\beta_{2m}))$ sont des suites adjacentes.

7 Déduire des questions précédentes :

a) la nature de la branche infinie quand t tend vers $+\infty$;
b) la forme de la branche de $\mathscr{S}$ entre B_{2n} et B_{2n+2} ;
c) que $\mathscr{S}$ forme une spirale quand t tend vers $+\infty$.

8 En remarquant que $\overrightarrow{M}'(t) = \cos\left(t^2\right)\vec{\imath} + \sin\left(t^2\right)\vec{\jmath}$, déterminer :

a) la base de Frenet de $\mathscr{S}$ en $M(t)$ et la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de t ;
b) la longueur de la portion de courbe entre B_{2n} et B_{2n+2} ;
c) une expression simple de $\alpha = \widehat{\left(\vec{\imath}, \vec{T}\right)}$ en fonction de t ;
d) Le rayon de courbure de $\mathscr{S}$ en $M(t)$.