PT CORRIGÉ DU CONCOURS BLANC MATHS B 10/03/2025

Calculatrices interdites
Le problème se compose de quatre parties indépendantes.

Partie A

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1 *Sans calcul, justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.*

M est symétrique réelle, donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$.

2 *En appelant C_1, C_2, C_3 les colonnes de M, calculer $C_1 + C_2 + C_3$ et $C_1 - C_3$.*
En déduire deux vecteurs propres de M et les valeurs propres associées.

$C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne $\boxed{\text{deux valeurs propres de } M : 1 \text{ et } 2}$, respectivement associées aux $\boxed{\text{vecteurs propres } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

3 *Achever la diagonalisation de M.*
On déterminera une matrice orthogonale P telle que $P^T.M.P$ est diagonale, de coefficients diagonaux strictement croissants, à préciser.

Soit λ la troisième valeur propre de M, alors $\lambda + 1 + 2 = \mathrm{Tr}(M) = 7$, donc $\boxed{\lambda = 4}$.
Les vecteurs propres associés sont orthogonaux à U et V, donc colinéaires à $U \wedge V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est donc un vecteur propre associé à W.
En normant les vecteurs U, V, W, on trouve les colonnes d'une matrice de passage orthogonale : $\boxed{P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$ telle que $\boxed{P^\top.M.P = \Delta = \mathrm{diag}(1,2,4)}$.

4 *Expliquer comment déterminer une matrice X symétrique, de valeurs propres strictement positives, telle que $X^2 = M$. (on ne demande pas le calcul explicite des coefficients de X).*

Si $D = \mathrm{diag}\left(1, \sqrt{2}, 2\right)$ et $X = P.D.P^\top$, alors $X = P.D^2.P^\top = P.\Delta.P^\top = M$; de plus, $X^\top = \left(P.D.P^\top\right)^\top = (P^\top)^\top.D^\top.P^\top = P.D.P^\top = X$: X est symétrique, et les valeurs propres de X : 1, $\sqrt{2}$ et 2 sont positives. On en déduit que $\boxed{X = P.\mathrm{diag}\left(1, \sqrt{2}, 2\right).P^\top}$.

Partie B

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit m un réel, et $\mathscr{C}_m$ la conique d'équation cartésienne

$$(m-1)x^2 + (m-1)y^2 + 2(m+1)xy + 2\sqrt{2}(m+1)x + 2\sqrt{2}(m-1)y + 2m = 0. \qquad (E)$$

1 *Écrire la matrice symétrique S_m, associée à l'équation de $\mathscr{C}_m$, et préciser en fonction de m le type de $\mathscr{C}_m$ (hyperbole, parabole ou ellipse).*

$\boxed{S_m = \begin{pmatrix} m-1 & m+1 \\ m+1 & m-1 \end{pmatrix}}$; $\det(S_m) = (m-1)^2 - (m+1)^2 = -4m$, et alors

$$\begin{cases} \text{si } m > 0, & \mathscr{C}_m \text{ est de type hyperbole ;} \\ \text{si } m = 0, & \mathscr{C}_m \text{ est de type parabole ;} \\ \text{si } m = 0, & \mathscr{C}_m \text{ est de type ellipse.} \end{cases}$$

2 *Préciser l'équation de $\mathscr{C}_{-1}$, et en déduire sa* nature.

Si $m=-1$, alors (E) s'écrit :
$-2x^2-2y^2-4\sqrt{2}y-2=0$ c'est-à-dire $x^2+y^2+2\sqrt{2}y+1=0$, soit $x^2+(y-\sqrt{2})-2+1=0$, c'est-à-dire $x^2+(y-\sqrt{2})^2=1$: c'est l'équation d'un $\boxed{\text{cercle de centre } \left(0,\sqrt{2}\right) \text{ et de rayon } 1}$.

3 *Diagonaliser la matrice S_m ; déterminer une matrice de rotation R, indépendante de m, telle que $R.S_m.R^T$ soit diagonale, de coefficients diagonaux α et β.*
On précisera la valeur de α et β, ainsi que l'angle de R.

$\chi_{S_m}=\begin{vmatrix}1-m-X & -(m+1)\\ -(m+1) & 1-m-X\end{vmatrix}=(X-(m-1))^2-(m+1)^2=((X-(m-1)-(m+1)))((X-(m-1)+(m+1)))=(X-2m)(X+2)$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } S_m \text{ sont } 2m \text{ et } -2}$. De plus, $S_m-2mI_2=\begin{pmatrix}-m-1 & m+1\\ m+1 & -m-1\end{pmatrix}$, matrice de rang 1 si $m\neq-1$, dont le noyau est $E_{2m}(S_m)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$S_m+2I_2=\begin{pmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & m+1\end{pmatrix}$, matrice de rang 1 si $m\neq-1$, dont le noyau est $E_{-2}(S_m)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Prenons alors $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; R est la matrice de la $\boxed{\text{rotation d'angle } \dfrac{\pi}{4}}$, et $R.S_m.R^\top=\mathrm{diag}(-2,2m)$ soit $\boxed{(\alpha,\beta)=(-2,2m)}$.

4 *Si on pose $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=R.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, montrer que (E) se ramène à*

$$-2x_1^2+4x_1+2my_1^2+4my_1+2m=0 \qquad (E_1)$$

Avec $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=R.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $(m-1)x^2+(m-1)y^2+2(m+1)xy=X.S_m.X^\top=R^\top.X_1{}^\top.S_m.R^\top.X_1=X_1{}^\top.R.S_m.R^\top.X_1=X_1{}^\top.\mathrm{diag}.X_1$ donc finalement $\boxed{(m-1)x^2+(m-1)y^2+2(m+1)xy=-2x_1^2+2my_1^2}$, ce qui peut être prouvé par un simple développement.
De plus, $x=\dfrac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}$ et $y=\dfrac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}$, donc $2\sqrt{2}(m+1)x_2+2\sqrt{2}(m-1)y=4my_1+4x_1$.
Alors $(m-1)x^2+(m-1)y^2+2(m+1)xy+2\sqrt{2}(m+1)x_2+2\sqrt{2}(m-1)y=-2x_1^2+2my_1^2+4my_1+4x_1$, donc l'équation (E) devient (E_1) : $-2x_1^2+4x_1+2my_1^2+4my_1+2m=0$.

5 *Déterminer les réels a et b tels que, après la translation $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, l'équation (E_1) devient :*

$$x_2^2-my_2^2=K \qquad (E_2)$$

On précisera les valeurs de a, b et K.

En posant $x_1=x_2+a$: $-2x_1^2+4x_1=-2(x_2+a)^2+4x_2+4a=-2x_2^2-4ax_2+4x_2+4a-2a^2=-2x_2^2+2$ si $\boxed{a=1}$.
En posant $y_1=y_2+b$: $2my_1^2+4my_1=2m\left(y_2^2+2by_2+4y_2+b^2\right)=2m\left(y_2^2+1\right)$ si $\boxed{b=-1}$.
Alors $-2x_1^2+4x_1+2my_1^2+4my_1+2m=-2x_2^2+2my_2+2$, donc après division par -2, l'équation (E_1) devient $x_2^2-my_2^2=K$ avec $\boxed{K=1}$.

6 *Déduire de la question précédente la nature de $\mathscr{C}_0$, et celle de $\mathscr{C}_1$.*

Avec $m=0$, (E_2) devient $x_2^2=1$, donc $x_2=\pm1$; $\boxed{\mathscr{C}_0 \text{ est la réunion de deux droites parallèles}}$.
Avec $m=1$, (E_2) devient $x_2^2-y_2^2=1$, $\boxed{\mathscr{C}_0 \text{ est une hyperbole équilatère}}$.

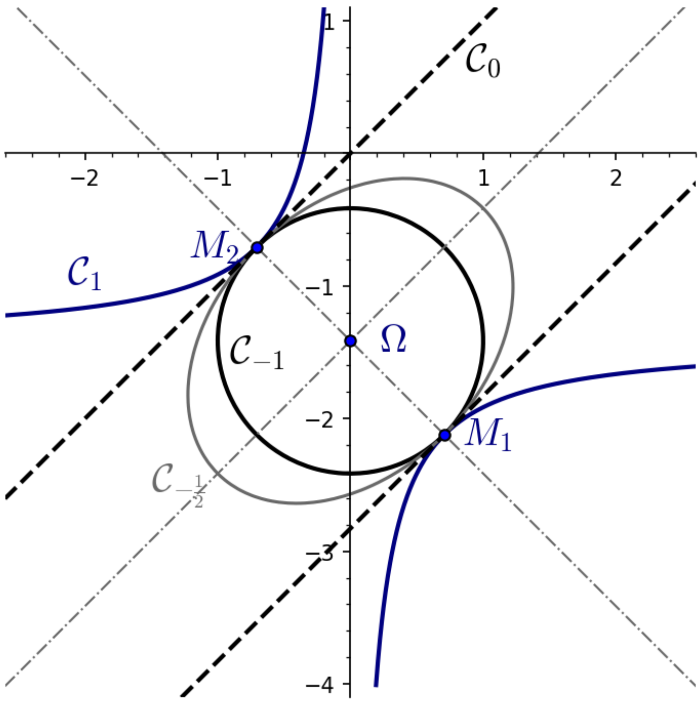
7 *Montrer que les coniques $\mathscr{C}_m$ ont un centre commun Ω, dont on déterminera les coordonnées dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.*
Montrer que les points M_1 et M_2, définis respectivement par $(x_2,y_2)=(1,0)$ et $(x_2,y_2)=(-1,0)$, appartiennent à toutes les coniques $\mathscr{C}_m$; préciser les coordonnées de M_1 et M_2 dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$(x_2, y_2) = (1,0)$ et $(x_2, y_2) = (-1,0)$ vérifient l'équation E_2 pour tout $m \in \mathbb{R}$, ce qui fournit deux points appartenant à toutes les coniques :

$M_1 : (x_2, y_2) = (1,0)$ soit $(x_1, y_1) = (2,-1)$, donc $\binom{x}{y} = R^\top \binom{2}{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-3}$;

$M_2 : (x_2, y_2) = (1,0)$ soit $(x_1, y_1) = (0,-1)$, donc $\binom{x}{y} = R^\top \binom{0}{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\binom{0}{-2}$.

Finalement $\boxed{M_1 : \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-3}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } M_2 : \left(0, -\sqrt{2}\right)}$.



Partie C

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}$.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ paramétrée par $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta$.

1 *Montrer que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est orthonormée ; calculer les dérivées $\vec{u}_\theta'$ et $\vec{v}_\theta'$.*
Déterminer le vecteur dérivé $\overrightarrow{M}'(\theta)$, et montrer que sa norme vérifie $\left\|\overrightarrow{M}'(\theta)\right\|^2 = (f(\theta))^2 + \left(f'(\theta)\right)^2$

$\vec{u}_\theta \cdot \vec{v}_\theta = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$, et $\left\|\vec{u}_\theta\right\|^2 = \left\|\vec{v}_\theta\right\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est orthonormée.
$\vec{u}_\theta' = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} = \vec{v}_\theta$ et $\vec{v}_\theta' = -\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath} = -\vec{u}_\theta$, donc $\boxed{(\vec{u}_\theta', \vec{v}_\theta') = (\vec{v}_\theta, -\vec{u}_\theta)}$.

Alors $\overrightarrow{M}'(\theta) = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{u}_\theta$, et comme la base $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est orthonormée, $\boxed{\left\|\overrightarrow{M}'(\theta)\right\|^2 = (f(\theta))^2 + \left(f'(\theta)\right)^2}$.

À partir d'ici, on prendra $f(\theta) = \cos\theta$.

2 *Déterminer $\dfrac{ds}{d\theta}$ et le vecteur tangent $\vec{T}$ (On pourra utiliser le résultat de la question $\boxed{1}$).*

Avec $f(\theta) = \cos\theta$, $f'(\theta) = -\sin\theta$ donc $(f(\theta))^2 + \left(f'(\theta)\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, et alors $\dfrac{ds}{d\theta} = 1$.
Comme $\overrightarrow{M}'(\theta)$ est normé, il est égal à $\vec{T} = -\sin\theta\vec{u}_\theta + \cos\theta\vec{v}_\theta = -\sin\theta\left(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}\right) + \cos\theta\left(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}\right) = (-\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)\vec{\imath} + \left(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\vec{\jmath} = -\sin(2\theta)\vec{\imath} + \cos(2\theta)\vec{\jmath} = \vec{v}_{2\theta}$.
Mais, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_\alpha = \vec{u}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$.

3 *Montrer que $\vec{T} = \vec{v}_{2\theta} = \vec{u}_{2\theta+\frac{\pi}{2}}$, et en déduire l'angle $\alpha = \widehat{\left(\vec{\imath}, \vec{T}\right)}$ en fonction de θ.*

D'après la question précédente, $\vec{T} = vecv_{2\theta}$; mais, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_\tau = \vec{u}_{\tau+\frac{\pi}{2}}$, donc $\vec{T} = \vec{u}_{2\theta+\frac{\pi}{2}}$, et par identification puisque $\vec{T} = \vec{u}_\alpha$: $\boxed{\alpha = 2\theta + \frac{\pi}{2}}$.

4 *Déduire des questions précédentes que $R = \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur la nature de la courbe $\mathscr{C}_f$?*

$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\alpha} = 1.\frac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{R \text{ est constante de valeur } \frac{1}{2}}$, et la courbe $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est un cercle}}$.

5 *Soit $(x(\theta), y(\theta))$ les coordonnées de $M(\theta)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Simplifier $\left(x(\theta)-\frac{1}{2}\right)^2 + y(\theta)^2$ et retrouver le résultat de la question précédente.*

$\overrightarrow{OM}(\theta) = \cos\theta\left(\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath}\right) = \cos^2\theta\vec{\imath} + \cos\theta\sin\theta\vec{\jmath}$; en prenant $x(\theta) = \cos^2\theta$ et $y(\theta) = \cos\theta\sin\theta$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \cos^4\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{1}{4} = \cos^2\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) - \cos^2\theta + \frac{1}{4} = \cos^2\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{4} = +\frac{1}{4}$, donc les coordonnées du point courant de $\mathscr{C}_f$ vérifient l'équation cartésienne : $\left(x(\theta)-\frac{1}{2}\right)^2 + y(\theta)^2 = \frac{1}{4}$, qui est l'équation du $\boxed{\text{cercle de centre } I : \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}}$.

Partie D

On considère le plan euclidien usuel, muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Pour $\in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = \int_0^t \cos(u^2)\mathrm{d}u$ et $\sigma(t) = \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u$.
Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; on considère la courbe $\mathscr{S}$ de point courant $M(t)$, de coordonnées $(x(t) = \gamma(t), y(t) = \sigma(t))$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1 *En posant $f(\theta) = 1-\cos\theta$ et $g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}}$, effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}t$ (on justifiera l'existence des intégrales et crochets apparaissant dans le calcul).*
En déduire la convergence de J_2.
Procéder au calcul analogue pour $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}t$ (on posera cette-fois-ci $f(\theta) = \sin\theta$ et $g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}}$), et en déduire la convergence de J_1.

En posant $\begin{cases} f'(\theta) = \sin\theta \\ g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} f(\theta) = 1-\cos\theta \\ g'(\theta) = \frac{-1}{2}\theta^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$, on obtient $f(\theta)g(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{\theta}}$.

Comme $1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2} + o_0(\theta^2)$, $f(\theta)g(\theta) = \frac{\theta^{3/2}}{2} + o_0\left(\theta^{3/2}\right)$, $\lim\limits_{\theta\to 0} f(\theta)g(\theta) = 0$; et comme $0 \leqslant f(\theta)g(\theta) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)g(\theta) = 0$.

Le crochet $[f(\theta)g(\theta)]_0^{+\infty}$ converge donc et vaut 0, ce qui autorise à écrire l'intégration par parties :
$J_2 = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\theta}{-2\sqrt{\theta}^3}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{\theta}^3}\mathrm{d}\theta$, intégrale absolument convergente car $0 \leqslant \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{\theta}^3} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\theta}^3}$ et que $\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{\theta}^3} \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\theta}}{2}$. On en déduit $\boxed{\text{la convergence de } J_2}$.

De même, en posant $\begin{cases} f'(\theta) = \cos\theta \\ g(\theta) = \theta^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$; $\begin{cases} f(\theta) = \sin\theta \\ g'(\theta) = \frac{-1}{2}\theta^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$, on obtient $f(\theta)g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}$.

Comme $f(\theta)g(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \sqrt{\theta}$, $\lim\limits_{\theta\to 0} f(\theta)g(\theta) = 0$; et comme $0 \leqslant |f(\theta)g(\theta)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\theta}}$, $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)g(\theta) = 0$.

Le crochet $[f(\theta)g(\theta)]_0^{+\infty}$ converge donc et vaut 0, ce qui autorise à écrire l'intégration par parties :
$J_1 = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{-2\sqrt{\theta}^3}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}^3}\mathrm{d}\theta$, intégrale absolument convergente car $\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}^3} \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta}}$ converge d'une part et d'autre part, $\left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}^3}\right| \leqslant \frac{1}{\theta^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{3/2}}$ converge. Finalement $\boxed{J_1 \text{ converge}}$.

2 *À l'aide d'un changement de variable $\theta = u^2$, montrer la convergence des intégrales*
$I_1 = \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\mathrm{d}u$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\mathrm{d}u$. (On admettra par la suite que $I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$).

Le changement de variable $u \mapsto \sqrt{u} = \theta$ est croissant et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, et $\mathrm{d}\theta = 2u\mathrm{d}u$, donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\theta}}$. Alors : $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\theta)}{2\sqrt{\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{J_1}{2}$ (nature et valeur). De même, $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{2\sqrt{\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{J_2}{2}$ (nature et valeur).

3 *Préciser la parité de γ et de σ, et en déduire une symétrie de la courbe $\mathscr{S}$. Sur quel intervalle étudier $\mathscr{S}$?*

$u \mapsto \cos(u^2)$ et $u \mapsto \sin(u^2)$ sont paires, donc leur primitive qui s'annule en 0 est impaire : γ et σ sont impaires. $M(-t) : (-x(t), -y(t))$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à O.
La courbe $\boxed{\mathscr{S} \text{ est donc symétrique par rapport à } O}$, et $\boxed{\text{l'étude se fait sur } \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[}$.

4 *Que valent $\gamma'(t)$ et $\sigma'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ et $\beta_n = \sqrt{n\pi}$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, montrer que $\gamma'(\alpha_n) = \sigma'(\beta_n) = 0$ et exprimer $\gamma'(\beta_n)$ et $\sigma'(\alpha_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
Que peut-on en déduire concernant les tangentes aux points $A_n = M(\alpha_n)$ et $B_n = M(\beta_n)$?

$\gamma'(t) = \cos(t^2)$ et $\sigma'(t) = \sin(t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$\gamma'(\alpha_n) = \cos(\alpha_n^2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$, et $\sigma'(\beta_n) = \sin(\beta_n^2) = \cos(n\pi) = 0$.
$\gamma'(\beta_n) = \cos(\beta_n^2) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, et $\sigma'(\alpha_n) = \sin(\alpha_n^2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$.
$\boxed{\text{La tangente en } A_n}$ est dirigée par $\gamma'(\alpha_n)\vec{\imath} + \sigma'(\alpha_n)\vec{\jmath} = (-1)^n\vec{\jmath}$, donc elle $\boxed{\text{est verticale}}$.
$\boxed{\text{La tangente en } B_n}$ est dirigée par $\gamma'(\beta_n)\vec{\imath} + \sigma'(\beta_n)\vec{\jmath} = (-1)^n\vec{\imath}$, donc elle $\boxed{\text{est horizontale}}$.

5 *Soit $n \in \mathbb{N}$, recopier et compléter le tableau suivant (NE=Nord-Est, SO=Sud-Ouest etc.) :*

t	β_{2n}		α_{2n}		β_{2n+1}		α_{2n+1}		β_{2n+2}
t^2	$2n\pi$		$2n\pi + \frac{\pi}{2}$		$2n\pi + \pi$		$2n\pi + \frac{3\pi}{2}$		$2n\pi + 2\pi$
$\gamma'(t)$	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
$\sigma'(t)$	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
$\gamma(t)$		↗		↘		↘		↗	
$\sigma(t)$		↗		↗		↘		↘	
direction		NE		NO		SO		SE	

6 *Pour $m \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide du changement de variable $x = u^2 - m\pi$ que*
$\gamma(\alpha_{m+1}) - \gamma(\alpha_m) = (-1)^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + m\pi}}\mathrm{d}x$;
en déduire que $(\gamma(\alpha_{2m+1}))$ et $(\gamma(\alpha_{2m}))$ sont des suites adjacentes.
Montrer de même que $(\sigma(\beta_{2m+1}))$ et $(\sigma(\beta_{2m}))$ sont des suites adjacentes.

le changement $u \mapsto x = u^2 - n\pi$ est $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $[\alpha_m, \alpha_{m+1}]$ dans $\left[\alpha_m^2 - n\pi, \alpha_{m+1}^2 - n\pi\right] = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x + m\pi}}$. Alors

$$\gamma(\alpha_{m+1}) - \gamma(\alpha_m) = \int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} \cos^2(u)\mathrm{d}u \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x + m\pi \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x + m\pi}} = (-1)^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + m\pi}}\mathrm{d}x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(\alpha_{2n+1}) - \gamma(\alpha_{2n}) > 0$; $\gamma(\alpha_{2n+2}) - \gamma(\alpha_{2n}) = \gamma(\alpha_{2n+2}) - \gamma(\alpha_{2n+1}) + \gamma(\alpha_{2n+1}) - \gamma(\alpha_{2n}) = (-1)^{2n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + (2n+1)\pi}} - \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + 2n\pi}}\right)\mathrm{d}x < 0$, et de même $\gamma(\alpha_{2n+1}) - \gamma(\alpha_{2n-1})$
$= \gamma(\alpha_{2n+1}) - \gamma(\alpha_{2n}) + \gamma(\alpha_{2n}) - \gamma(\alpha_{2n-1}) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + (2n+1)\pi}} - \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x + (2n-1)\pi}}\right)\mathrm{d}x > 0.$
On en déduit que $(\gamma(\alpha_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(\gamma(\alpha_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que $\gamma(\alpha_{2n+1}) < \gamma(\alpha_{2n})$.
De plus, $|\gamma(\alpha_{2n+1}) - \gamma(\alpha_{2n})| \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
$\boxed{(\gamma(\alpha_{2m+1})) \text{ et } (\gamma(\alpha_{2m})) \text{ sont des suites adjacentes.}}$
De même, en changeant γ en σ, α en β, cos en sin, et $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ en $[0, \pi]$ on montre que
$\boxed{(\sigma(\beta_{2m+1})) \text{ et } (\sigma(\beta_{2m})) \text{ sont des suites adjacentes.}}$

7 *Déduire des questions précédentes :*

a) la nature de la branche infinie quand t tend vers $+\infty$;

b) la forme de la branche de $\mathscr{S}$ entre B_{2n} et B_{2n+2} ;

c) que $\mathscr{S}$ forme une spirale quand t tend vers $+\infty$.

a) Puisque $(\gamma(t), \sigma(t))$ tend vers (I_1, I_2), la branche infinie de $\mathscr{S}$ quand $t \to +\infty$ est $\boxed{\text{le point asymptote } \Omega : (I_1, I_2)}$.

b) voir la figure 1 ci-dessous.

c) Ces portions de courbes forment une spirale qui s'enroule autour de Ω : voir la figure 2 ci-dessous.

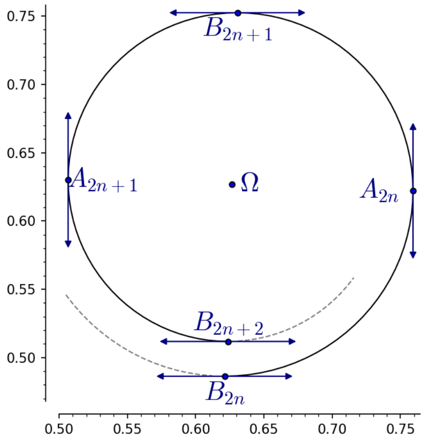


fig. 1

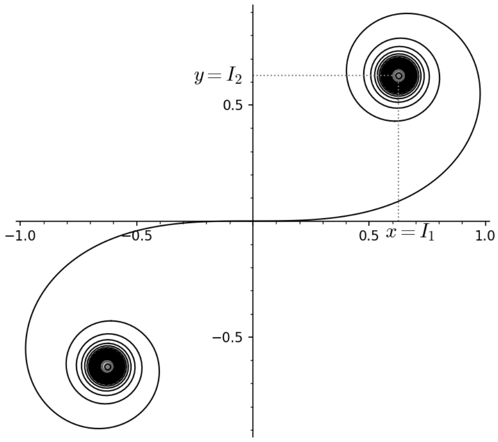


fig. 2

8 *En remarquant que $\overrightarrow{M}'(t) = \cos(t^2)\vec{\imath} + \sin(t^2)\vec{\jmath}$, déterminer :*

a) la base de Frenet de $\mathscr{S}$ en $M(t)$ et la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de t ;

b) la longueur de la portion de courbe entre B_{2n} et B_{2n+2} ;

c) une expression simple de $\alpha = \widehat{\left(\vec{\imath}, \vec{T}\right)}$ en fonction de t ;

d) Le rayon de courbure de $\mathscr{S}$ en $M(t)$.

a) la base de Frenet de $\mathscr{S}$ en $M(t)$ et la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de t ; $\overrightarrow{M}'(t) = \cos(t^2)\vec{\imath} + \sin(t^2)\vec{\jmath}$ est normé, donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1}$, $\boxed{\vec{T} = \overrightarrow{M}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}}$, $\boxed{\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}}$.

b) La portion de courbe entre B_{2n} et B_{2n+2} a pour longueur
$\ell_n = \displaystyle\int_{\beta_{2n}}^{\beta_{2n+2}} \left\| \overrightarrow{M}'(t) \right\| \mathrm{d}t = \int_{\beta_{2n}}^{\beta_{2n+2}} 1 \mathrm{d}t = \beta_{2n+2} - \beta_{2n}$ soit $\boxed{\ell_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{2\pi}}$.

c) En partant de $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, on aboutit par relèvement à $\boxed{\alpha = t^2}$.

d) $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}$ donc $\boxed{R = \dfrac{1}{2t}}$.