SPE PT	QCM sur les surfaces	2024/2025

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

Soit (H) la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=-1$.

1) (H) est invariante :

a par une réflexion de plan $z=0$; b par une réflexion de plan $x=0$;

c par une symétrie centrale ; d par toute rotation d'axe O_z réponse

2) La section de (H) par un plan horizontal est

a une hyperbole ; b une parabole ; c un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point. réponse

3) Le plan tangent à (H) en $S:(0,0,1)$ a pour équation cartésienne

a $x-y-z=0$; b $x-y-z=1$;

c $z=1$; d $z^2=1$ réponse

4) La section de (H) par un plan vertical est

a une hyperbole ; b une parabole ; c un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point. réponse

5) (H) est

a une surface de révolution d'axe O_z ; b une sphère ; c un cône ; d une surface réglée réponse

6) Un paramétrage de (H) est

a $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(u)\cos v \\ y = \operatorname{sh}(u)\sin v \\ z = \pm\operatorname{ch}(u) \end{cases}$; b $\begin{cases} x = \operatorname{ch}(u)\cos v \\ y = \operatorname{sh}(u)\cos v \\ z = \sin v \end{cases}$; c $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(t)\cos t \\ y = \operatorname{sh}(t)\sin t \\ z = \operatorname{ch} t \end{cases}$; d $\begin{cases} x = \sqrt{1+u^2}\cos v \\ y = \sqrt{1+u^2}\sin v \\ z = u \end{cases}$;

réponse

VRAI/FAUX

7) La section de (H) par n'importe quel plan est une conique. réponse

8) Il existe au moins un point A de (H) tel que le plan tangent à (H) en A est parallèle au plan (Π) d'équation $3x+2y-4z=0$. réponse

9) On obtient (H) en faisant tourner autour de l'axe O_z la courbe paramétrée par
$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cos t, y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sin t, z=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), t\in\mathbb{R}^*$. réponse

10) (H) est composée de deux parties qui ne se touchent pas. réponse

1) *(H) est invariante :* $\boxed{a}$ *par une réflexion de plan* $z = 0$ *;* $\boxed{b}$ *par une réflexion de plan* $x = 0$ *;*
$\boxed{c}$ *par une symétrie centrale;* $\boxed{d}$ *par toute rotation d'axe* O_z.

. . . .

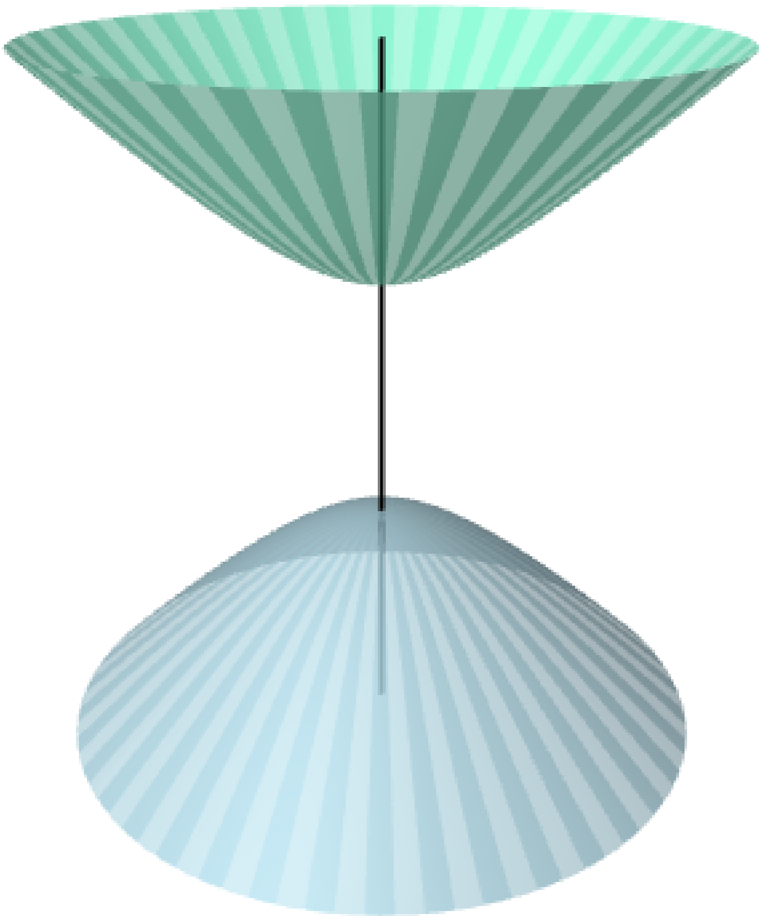
Réponses justes : $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$ et $\boxed{d}$.

Une réflexion de plan $z = 0$ transforme $M : (x, y, z)$ en $M_1 : (x, y, -z)$, et $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 - (-z)^2$, d'où l'invariance de H : $\boxed{a}$ est vrai.

Une réflexion de plan $x = 0$ transforme $M : (x, y, z)$ en $M_2 : (-x, y, z)$, et $x^2 + y^2 - z^2 = (-x)^2 + y^2 - z^2$, d'où l'invariance de H : $\boxed{b}$ est vrai.

Une symétrie centrale transforme $M : (x, y, z)$ en $M_3 : (-x, -y, -z)$, et $x^2 + y^2 - z^2 = (-x)^2 + (-y)^2 - (-z)^2$, d'où l'invariance de H : $\boxed{c}$ est vrai.

Une rotation d'axe O_z et d'angle θ transforme $M : (x, y, z)$ en
$M_4 : (x_4, y_4, z_4) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, -z)$;
or $x_4^2 + y_4^2 = (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = x^2\cos^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\cos^2\theta = x^2 + y^2$, donc $x_4^2 + y_4^2 - z_4^2 = x^2 + y^2 - z^2$. (H) est invariante par cette rotation : $\boxed{d}$ est vrai. retour au QCM



2) *La section de* (H) *par un plan horizontal est*

$\cancel{a}$ *une hyperbole ;* $\cancel{b}$ *une parabole ;* $\boxed{c}$ *un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

Un plan horizontal a pour équation $z = a$, $a \in \mathbb{R}$; les équations de la section de (H) par ce plan sont $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ z = a \end{cases}$

soit $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 - 1 \\ z = a \end{cases}$.

Si $|a| \geqslant 1$, il s'agit d'un cercle ; si $|a| = 1$, c'est un point assimilé à un cercle de rayon 1 ; si $|a| \leqslant 1$, c'est l'ensemble vide. retour au QCM

3) *Le plan tangent à (H) en $S:(0,0,1)$ a pour équation cartésienne*

$\boxed{\cancel{a}}$ $x+y-z=0$; $\boxed{\cancel{b}}$ $x+y-z=1$;

$\boxed{c}$ $z=1$; $\boxed{d}$ $z^2=1$

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

Le gradient de $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2-1$ est $\nabla f=(2x,2y,-2z)$; $\nabla f(S)=(0,0,-2)\neq(0,0,0)$ est le vecteur normal au plan tangent à (H) en S, dont une équation cartésienne est $z=1$. retour au QCM

4) *La section de (H) par un plan vertical est*

$\boxed{a}$ *une hyperbole ou deux droites ;*

$\boxed{\cancel{b}}$ *une parabole ou un segment ;*

$\boxed{\cancel{c}}$ *un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point.*

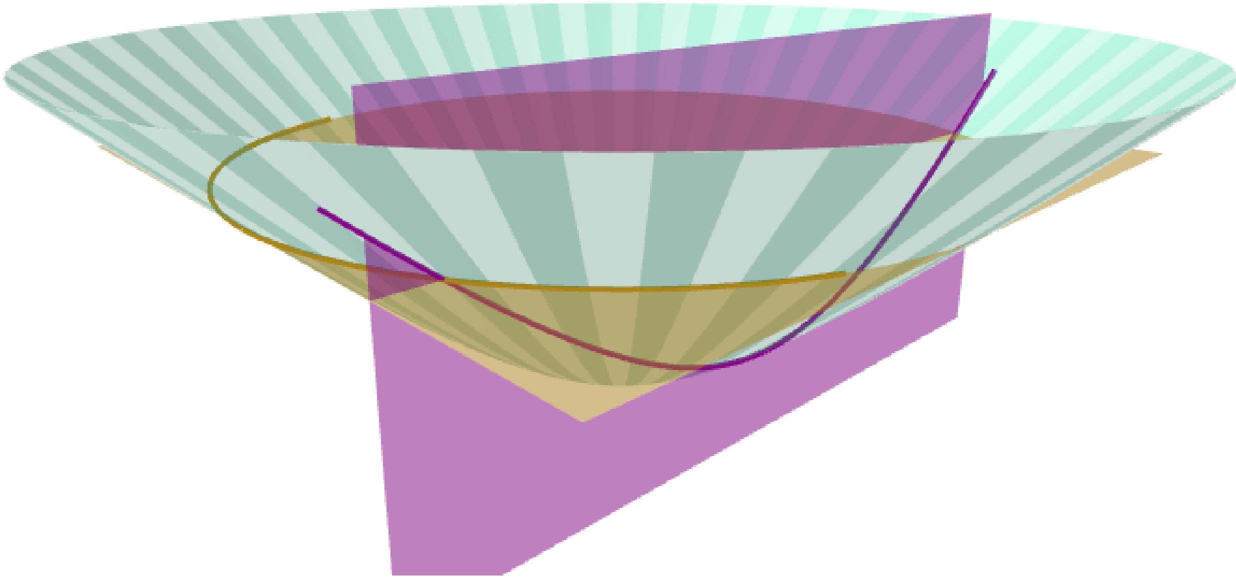
Un plan horizontal a pour équation $ax + by = h$, $(a, b, h) \in \mathbb{R}$; quitte à changer de repère (rotation d'axe O_z), on peut se ramener à $x = h$.

les équations de la section de (H) par ce plan sont $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ x = h \end{cases}$ soit $\begin{cases} y^2 - z^2 = h^2 - 1 \\ x = h \end{cases}$.

Si $|h| \neq 1$, il s'agit d'une hyperbole ; Si $|h| = 1$, il s'agit de deux droites.

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$.

retour au QCM



5) *(H) est*

$\boxed{a}$ *une surface de révolution d'axe O_z ;* $\boxed{b}$ *une sphère ;* $\boxed{c}$ *un cône ;* $\boxed{d}$ *une surface réglée*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{a}$.

Comme la section de (H) par tout plan horizontal est un cercle (éventuellement dégénéré), (H) est une surface de révolution d'axe O_z : $\boxed{a}$ est vrai.

(H) n'est pas bornée, car $(H) \cap \{z = a\} \neq \emptyset$ pour $a > 1$. Donc (H) n'est pas une sphère. $\boxed{b}$ est faux.
D'après les questions 2 et 3, l'intersection de (H) avec le plan tangent passant par S est réduite au point S, donc ne contient pas une droite ; (H) n'est pas réglée, donc n'est pas un cône : $\boxed{c}$ et $\boxed{d}$ sont faux. retour au QCM

6) *Un paramétrage de (H) est*

$\boxed{a}$ $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(u)\cos v \\ y = \operatorname{sh}(u)\sin v \\ z = \pm \operatorname{ch}(u) \end{cases}$; $\boxed{\cancel{b}}$ $\begin{cases} x = \operatorname{ch}(u)\cos v \\ y = \operatorname{sh}(u)\cos v \\ z = \sin v \end{cases}$; $\boxed{\cancel{c}}$ $\begin{cases} x = \operatorname{sh}(t)\cos t \\ y = \operatorname{sh}(t)\sin t \\ z = \operatorname{ch} t \end{cases}$; $\boxed{\cancel{d}}$ $\begin{cases} x = \sqrt{1+u^2}\cos v \\ y = \sqrt{1+u^2}\sin v \\ z = u \end{cases}$;

. . . .

Réponse juste : $\boxed{a}$.

On vérifie qu'avec le premier paramétrage, $x^2 + y^2 = \operatorname{sh}^2(u)$ donc $x^2 + y^2 - z^2 = \operatorname{sh}^2(u) - \operatorname{ch}^2(u) = -1$. $\boxed{a}$ est vrai.

Avec le deuxième paramétrage, $|z| \leqslant 1$, ce qui est incompatible avec le résultat de la question 2. $\boxed{b}$ est faux.

Le troisième paramétrage n'a qu'un paramètre, donc définit une courbe, et non une surface. $\boxed{c}$ est faux.

Avec le quatrième paramétrage, $x^2 + y^2 = 1 + u^2$ donc $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et non -1. $\boxed{d}$ est faux. retour au QCM

7) *La section de (H) par n'importe quel plan est une conique.*

. . . .

C'est vrai.

Un plan a une équation $a\,x+b\,y+c\,z=h$, où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Quitte à permuter x,y,z, supposons que $c\neq 0$; alors $z=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma$, et alors les équations de la section de (H) par ce plan sont $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=-1 \\ z=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^2+y^2-(\alpha\,x+\beta\,y+\gamma)^2=-1 \\ z=\alpha\,x+\beta\,y+\gamma \end{cases}$.

On reconnaît dans la première équation celle d'une conique ; cette équation est celle du projeté de la section sur un plan, et cette section est alors une conique. retour au QCM

8) *Il existe au moins un point A de (H) tel que le plan tangent à (H) en A est parallèle au plan (Π) d'équation $3x+2y-4z=0$.*

. . . .

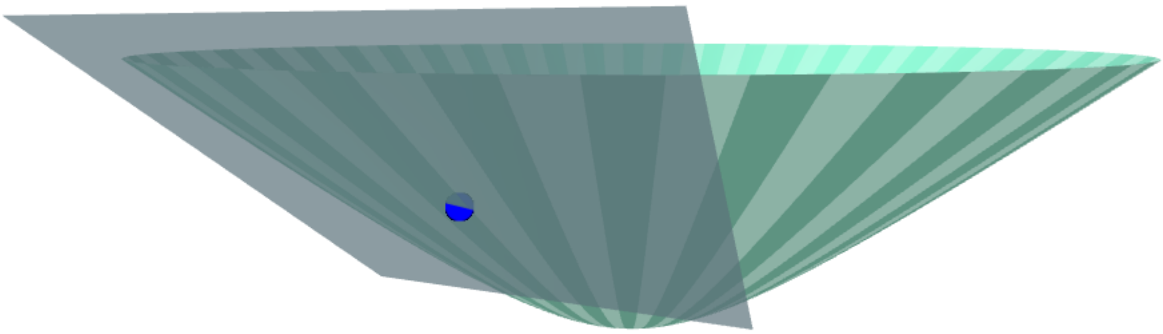
C'est vrai.

Le gradient de $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2-1$ est $\nabla f=(2x,2y,-2z)$; si $A:(a,b,c)$, alors $\nabla f(A)=2(a,b,-c)\neq(0,0,0)$ est le vecteur normal au plan Π tangent (T) à (H) en S, dont une équation cartésienne est $ax+by-cz=a^2+b^2-c^2$.

Ce plan tangent (T) est parallèle à (Π) si, et seulement si, $(a,b,-c)$ et $(3,2,-4)$ sont proportionnels, c'est-à-dire $(a,b,-c)=(3\lambda,2\lambda,-4\lambda)$.

$A\in(H)$ si, et seulement si, $9\lambda^2+4\lambda^2-16\lambda^2=-1$, c'est-à-dire $-3\lambda^2=-1$; $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ convient.

Le plan tangent à $A:\left(\sqrt{3},\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$ a pour équation $3x+2y-4z=-\sqrt{3}$ donc est parallèle à (Π). retour au QCM



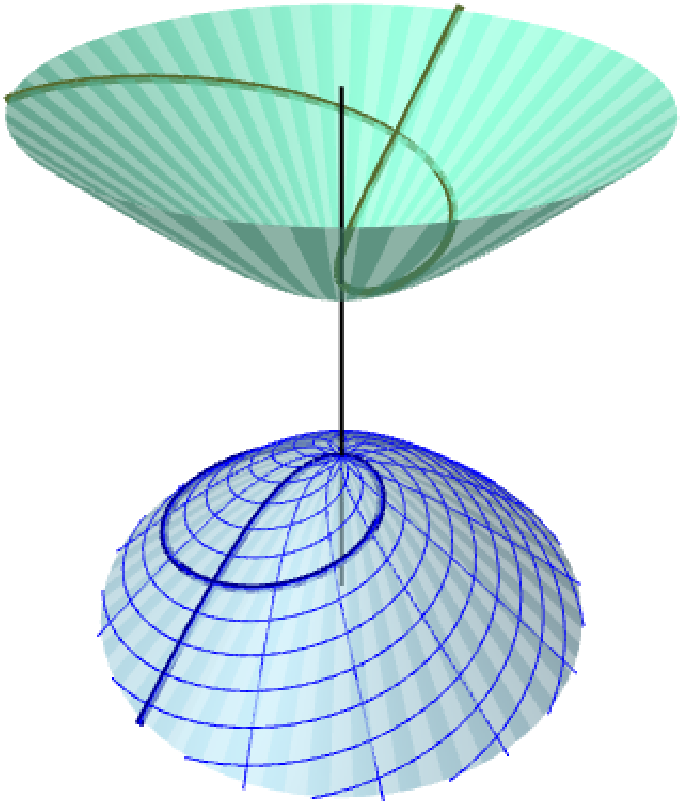
9) *On obtient (H) en faisant tourner autour de l'axe O_z la courbe paramétrée par $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\cos t, y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin t, z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), t \in \mathbb{R}^*$.*

. . . .

C'est vrai.

Avec ce paramétrage, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right)$ et $z^2 = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right)$, donc $x^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{4}(-2-2) = -1$.

La courbe est tracée sur (H). De plus, une étude rapide de z montre que z prend toutes les valeurs de $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$; donc la rotation de la courbe autour de l'axe O_z recouvre (H). retour au QCM



10) *(H) est composée de deux parties qui ne se touchent pas.*

. . . .

C'est vrai.

Les deux calottes qui composent (H) sont incluses dans $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 1$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < -1$, donc sont séparées par l'ouvert $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -1 < z < 1\right\}$. retour au QCM