Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) L'équation homogène associée à l'équation différentielle $y' = y + y^2 + 1$ est

a $y' = y$;

b $y' = y + y^2$;

c aucune des deux. réponse

---

2) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x\,y' - 2y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

a $\left\{\dfrac{-1}{2} + \dfrac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$;

b $\left\{\dfrac{-1}{2} + C\,x^2, C \in \mathbb{R}\right\}$;

c $\left\{\dfrac{-1}{2x} + \dfrac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$;

d $\left\{\dfrac{-B}{2} + C\,x^2, (B,C) \in \mathbb{R}^2\right\}$. réponse

---

3) Le problème de Cauchy $\begin{cases} x\,y' - 2y = 1 \\ y(0) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$:

a n'admet pas de solutions ;

b admet une solution unique ;

c admet une infinité de solutions. réponse

---

4) L'équation différentielle $y''' + y'' + y' + y = \mathrm{e}^t$ admet pour ensemble de solutions réelles :

a $\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + D\mathrm{e}^t, (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4\}$; b $\left\{A\mathrm{e}^{it} + \overline{A}\mathrm{e}^{-it} + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^t}{4}, (A,C) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}\right\}$;

c $\left\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^t}{4}, (A,B,C) \in \mathbb{R}^4\right\}$; d $\left\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{4}, (A,B,C) \in \mathbb{R}^4\right\}$. réponse

---

5) On considère le système $X' = A.X$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a Toutes les solutions admettent une limite finie en $+\infty$;

b on se ramène par réduction à trois équations linéaires *indépendantes* ;

c il est nécessaire de calculer P^{-1} pour écrire la solution générale. réponse

---

6) On considère l'équation $(t^2-1)y'' - t\,y' + (1+t^2)y = 0$;

a il existe forcément une solution polynomiale de degré 2 ;

b il existe une unique solution telle que $y(0) = 1, y'(0) = 0$;

c il existe une solution DSE paire. réponse

---

7) Pour résoudre l'équation différentielle $y'' - (t+1)\,y' + t\,y = 0$:

a on utilise l'équation caractéristique $r^2 - (t+1)\,r + t = (r-1)(r-t)$: les solutions sont $t \mapsto A.\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{t^2}$;

b on pose $x = y'$ et on résout le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1) & -t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en réduisant la matrice ;

c on vérifie que $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est solution, et on pose $y(t) = \mathrm{e}^t z(t)$. réponse

1) *L'équation homogène associée à l'équation différentielle $y' = y + y^2 + 1$ est*

$\boxed{\cancel{a}}$ $y' = y$;

$\boxed{\cancel{b}}$ $y' = y + y^2$;

$\boxed{c}$ *aucune des deux.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

L'équation $y' = y + y^2 + 1$ n'est pas linéaire, donc la notion d'équation homogène ne s'applique pas. retour au QCM

2) *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x\,y' - 2y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est*

$\boxed{\cancel{a}}$ $\left\{\dfrac{-1}{2} + \dfrac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$;

$\boxed{b}$ $\left\{\dfrac{-1}{2} + C\,x^2, C \in \mathbb{R}\right\}$;

$\boxed{\cancel{c}}$ $\left\{\dfrac{-1}{2x} + \dfrac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$;

$\boxed{\cancel{d}}$ $\left\{\dfrac{-B}{2} + C\,x^2, (B, C) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$.

L'équation homogène $x\,y' - 2y = 1$ est $x\,y' = 2y$; on peut écrire au brouillon : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x}$ soit $(\ln|y|)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\ln|x|) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2)$; $y = x^2$ est une solution de l'équation sans second membre.

On constate facilement que la fonction constante $y = \dfrac{-1}{2}$ est solution de l'équation complète. retour au QCM

3) *Le problème de Cauchy* $\begin{cases} x\,y' - 2y = 1 \\ y(0) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$:

$\boxed{a}$ *n'admet pas de solutions ;*

$\boxed{b}$ *admet une solution unique ;*

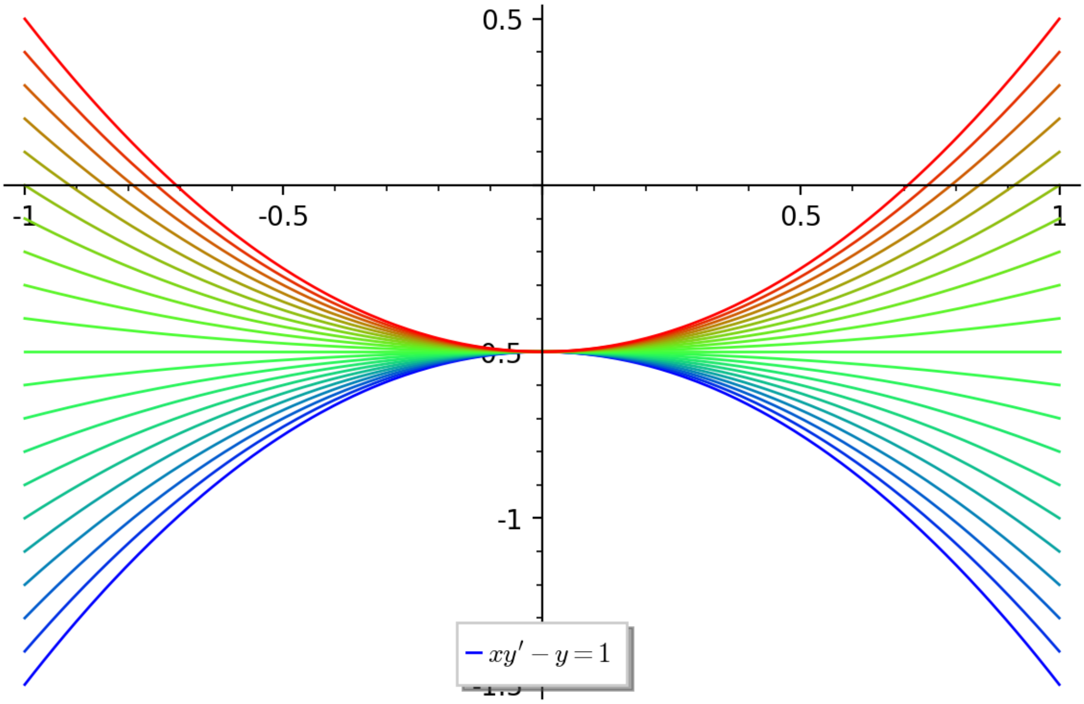
$\boxed{c}$ *admet une infinité de solutions.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

Comme le coefficient dominant de l'équation, x, s'annule en 0, le théorème de Cauchy-Lipschitz garantissant l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy ne s'applique pas.

Cependant, en posant $x = 0$ dans l'équation différentielle, on obtient $-2y(0) = 1$, soit $y\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$, ce qui est vérifié par toute solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.



retour au QCM

4) *L'équation différentielle $y''' + y'' + y' + y = \mathrm{e}^t$ admet pour ensemble de solutions réelles :*

$\boxed{\cancel{a}}$ $\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + D\mathrm{e}^t, (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4\}$;

$\boxed{b}$ $\left\{A\mathrm{e}^{it} + \overline{A}\mathrm{e}^{-it} + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^t}{4}, (A,C) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}\right\}$;

$\boxed{c}$ $\left\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^t}{4}, (A,B,C) \in \mathbb{R}^4\right\}$;

$\boxed{\cancel{d}}$ $\left\{A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t\mathrm{e}^t}{4}, (A,B,C) \in \mathbb{R}^4\right\}$.

....

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{b}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$.

L'équation caractéristique correspondante est $r^3 + r^2 + r + 1 = (r^2+1)(r+1)$; ses racines sont $(i, -i, -1)$ (elles sont simples).

Les solutions de l'équation homogène sont donc l'espace vectoriel de dimension 3 $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}^{it}, \mathrm{e}^{-it}, \mathrm{e}^{-t}\right)$, formant $t \mapsto A\mathrm{e}^{it} + B\mathrm{e}^{-it} + C\mathrm{e}^{-t}, (A,B,C) \in \mathbb{C}^3$.

On obtient une solution réelle avec $B = \overline{A}$ et $C \in \mathbb{R}$; en remplaçant le complexe A par $\dfrac{A - iB}{2}$ ($(A,B) \in \mathbb{R}^2$), on trouve $A\cos t + B\sin t + C\mathrm{e}^{-t}$.

Enfin, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est clairement une solution particulière de l'équation complète. retour au QCM

5) *On considère le système* $X' = A.X$ *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{a}$ *Toutes les solutions admettent une limite finie en* $+\infty$ *;*

$\boxed{b}$ *on se ramène par réduction à trois équations linéaires* indépendantes *;*

$\boxed{\cancel{c}}$ *il est nécessaire de calculer* P^{-1} *pour écrire la solution générale.*

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{b}}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_A = X(X+1)(X+2)$, scindé à racines simples, donc elle est diagonalisable et a pour spectre $\{0, -12\}$.

Le système réduit, obtenu en posant $X = P.Y$ est donc $Y' = D.Y$, avec $D = \operatorname{diag}(-2, -1, 0)$; il est composé de trois équations indépendantes $y_1' = 0$, $y_2' = -y_2$ et $y_3' = -2y_3$. $\boxed{\mathrm{b}}$

On trouve donc $y_1 = C_1, y_2 = C_2\mathrm{e}^{-t}, y_3 = C_3\mathrm{e}^{-2t}$, d'où il résulte que les solutions en y_i tendent toutes vers une limite finie, et alors $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t)$ ainsi que $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} P.Y(t)$ tendent vers un vecteur fini. $\boxed{\mathrm{a}}$

Comme le système est sans second membre, la solution générale s'écrit $XX = P.Y$; on n'a pas besoin d'inverser P pour la calculer. retour au QCM

6) *On considère l'équation* $(t^2-1)y''-t\,y'+(1+t^2)y=0$ *;*

$\cancel{a}$ *il existe une solution polynomiale de degré 2 ;*

$\boxed{b}$ *il existe une unique solution telle que* $y(0)=1, y'(0)=0$ *;*

$\boxed{c}$ *il existe une solution DSE paire.*

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{b}}$ et $\boxed{\mathbf{c}}$. retour au QCM

Si $Q(t)$ est un polynôme de degré 2, alors $(1+t^2)Q(t)$ est un polynôme de degré 4, $-t\,P'(t)$ est un polynôme de degré 2, et $(t^2-1)P''(t)$ est un polynôme de degré 2 :

Alors $(t^2-1)P''(t)-t\,P'(t)+(1+t^2)P(t)$ est de degré 4, donc ne peut pas être nul. $\boxed{\cancel{a}}$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence d'une solution unique sur $]-1;1[$ qui vérifie les conditions initiales $y(0)=1, y'(0)=0$: $\boxed{b}$

Posons $y(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors :

$y(t)=a_0+a_1 t+\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n t^n$;

$t^2 y(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2}=\sum\limits_{m=2}^{+\infty} a_{m-2} t^m \ (m=n-2)$

$-t\,y'(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -n\,a_n t^n=-a_1\,t-\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\,a_n t^n$

$t^2 y''(t)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^n$

$y''(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}=2a_2+6a_3+\sum\limits_{m=2}^{+\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}t^m$.

Donc $(t^2-1)y''(t)-t\,y'(t)+(1+t^2)y(t)=$

$$a_0+2a_2+6a_3\,t+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n-2}-n\,a_n+n(n-1)a_n+a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}\right)t^n,$$

donc $y(t)$ est solution de $(t^2-1)y''-t\,y'+(1+t^2)y=0$ si, et seulement si, $a_0+2a_2=0$, $a_3=0$, et $(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n-1)^2a_n+a_{n-2}=0$ pour $n\geqslant 2$;

en prenant $a_3=a_1=0$, $a_0=2$, $a_2=-1$, puis $a_{n+2}=\dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}\left((n-1)^2a_n+a_{n-2}\right)$ pour tout $n\geqslant 2$, on définit une solution DSE et paire de l'équation différentielle : $\boxed{c}$.

retour au QCM

7) *Pour résoudre l'équation différentielle $y'' - (t+1)\,y' + t\,y = 0$:*

$\boxed{\cancel{a}}$ *on utilise l'équation caractéristique $r^2 - (t+1)\,r + t = (r-1)(r-t)$: les solutions sont $t \mapsto A.e^t + Be^{t^2}$;*

$\boxed{\cancel{b}}$ *on pose $x = y'$ et on résout le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1) & -t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en réduisant la matrice;*

$\boxed{c}$ *on vérifie que $t \mapsto e^t$ est solution, et on pose $y(t) = e^t z(t)$.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

Les coefficients de $y'' - (t+1)\,y' + t\,y = 0$ dépendent de t, donc la méthode de l'équation caractéristique n'est pas applicable : $\boxed{\cancel{a}}$

Avec $x = y'$ et $X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on obtient effectivement le système $X' = A(t).X$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} (t+1) & -t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que l'on peut diagonaliser (si $t \neq 1$) : $A(t) = P(t).\operatorname{diag}(1,t).P(t)^{-1}$.

Cependant, $P(t)$ dépend de t, donc le changement de base $X(t) = P(t).Y(t)$ donne $X' = P'.Y + P.Y'$ et alors $X' - A.X = P'.Y + P.Y' - P.D.P^{-1}.X = P'.Y + P.(Y' - D.Y)$, ce qui ne mène à rien d'exploitable si $P' \neq (0)$: $\boxed{\cancel{b}}$

Heureusement, $e^t - (t+1)e^t + te^t = 0$, donc $t \mapsto e^t$ est solution de l'équation ; alors le changement $y(t) = z(t)e^t$ transforme l'équation en $\left(2e^t - 1\right) z' + e^t z'' = 0$, soit $z'' + \left(2 - e^{-t}\right) z' = 0$, équation du premier ordre en z', que l'on sait résoudre.

retour au QCM