SPE PT	**QCM sur les variables aléatoires**	**2024/2025**

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $(\mathbb{E}(X),\mathbb{V}(X)) =$

$\boxed{\text{a}}$ (p^n, np^{n-1}) ; $\boxed{\text{b}}$ $(np, n(n-1)p)$; $\boxed{\text{c}}$ $(np, n^2p(1-p))$; $\boxed{\text{d}}$ $(np, np(1-p))$. réponse

---

2) Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $(\mathbb{E}(X),\mathbb{V}(X)) =$

$\boxed{\text{a}}$ $(\lambda, 1-\lambda)$; $\boxed{\text{b}}$ (λ, λ^2) ; $\boxed{\text{c}}$ $(\lambda, \lambda^2-\lambda)$; $\boxed{\text{d}}$ (λ, λ). réponse

---

3) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors

$\boxed{\text{a}}$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbb{V}(X) = \dfrac{p}{1-p}$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{P}(X=5) = p(1-p)^4$. réponse

---

4) Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$, alors

$\boxed{\text{a}}$ $2X \sim \mathscr{P}(2\lambda)$; $\boxed{\text{b}}$ $2X \sim \mathscr{P}(\lambda^2)$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. réponse

---

5) Soit X une variable aléatoire telle que X et X^2 admettent une espérance. Alors

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{E}(X^2) \leqslant \mathbb{E}(X)^2$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{E}(X^2) \geqslant \mathbb{E}(X)^2$. réponse

---

6) Soit X une variable aléatoire dont le carré admet une espérance. Alors

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{E}(1-X) = 1-\mathbb{E}(X)$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbb{V}(1-X) = \mathbb{V}(X)$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{V}(1-X) \leqslant 1-\mathbb{V}(X)$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{E}(1-X) = -\mathbb{E}(X)$. réponse

---

7) Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors

$\boxed{\text{a}}$ X et Y indépendantes $\Longrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ pour tous X et Y ;

$\boxed{\text{c}}$ X et Y indépendantes $\Longleftrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Longrightarrow X$ et Y indépendantes.

réponse

---

8) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$;

$\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X_n)}{\alpha^2}$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \leqslant \alpha) \geqslant \dfrac{\mathbb{V}(X_n)}{\alpha^2}$. réponse

---

9) Si X, Y, Z sont des variables aléatoires indépendantes deux à deux, alors

$\boxed{\text{a}}$ (X, Y, Z) sont indépendantes mutuellement ; $\boxed{\text{b}}$ X et $Y+Z$ sont indépendantes ;

$\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{V}(X+Y+Z) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+\mathbb{V}(Z)$. réponse

---

10) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, $\mathbb{G}_X$ sa série génératrice, et R_X le rayon de convergence de $\mathbb{G}_X$. Alors

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{G}_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$; $\boxed{\text{b}}$ $R_X \leqslant 1$;

$\boxed{\text{c}}$ Si $R_X > 1$, alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{G}_X''(1) - \mathbb{G}_X'(1)$; $\boxed{\text{d}}$ $R_X \geqslant 1$. réponse

---

1) *Si* $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, *alors* $(\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)) =$

$\boxed{a}$ (p^n, np^{n-1}) ; $\boxed{b}$ $(np, n(n-1)p)$; $\boxed{c}$ $(np, n^2p(1-p))$; $\boxed{d}$ $(np, np(1-p))$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$. C'est du cours...

retour au QCM

2) *Si* $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$*, alors* $(\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)) =$

$\boxed{a}$ $(\lambda, 1-\lambda)$; $\boxed{b}$ (λ, λ^2) ; $\boxed{c}$ $(\lambda, \lambda^2 - \lambda)$; $\boxed{d}$ (λ, λ).

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{d}}$. C'est du cours...

retour au QCM

3) *Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors*

$\boxed{a}$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $\boxed{b}$ $\mathbb{V}(X) = \dfrac{p}{1-p}$; $\boxed{c}$ $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$; $\boxed{d}$ $\mathbb{P}(X=5) = p(1-p)^4$.

....

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{d}}$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse, à moins de prétendre que $\mathbb{P}(X=0) = 0$ signifie que 0 est une valeur de X presque impossible mais pas impossible, ce qui relève de la (presque) mauvaise foi. $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$, donc $\boxed{\cancel{b}}$ et $\boxed{\cancel{c}}$ sont fausses en général. $\mathbb{P}(X=5) = p(1-p)^4$ d'après le cours.

retour au QCM

4) *Si* $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $(\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$, *alors*

$\boxed{a}$ $2X \sim \mathscr{P}(2\lambda)$; $\boxed{b}$ $2X \sim \mathscr{P}(\lambda^2)$; $\boxed{c}$ $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $\boxed{d}$ $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$. D'après le cours, si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$. En particulier, $\lambda = \mu$, $2X \sim \mathscr{P}(2\lambda)$ $\boxed{\text{a}}$. Bien sûr, comme $\lambda \neq 2$, $\lambda^2 \neq 2\lambda$ et $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ est dans le cours. En prenant $k = 0$ par exemple, on obtient clairement que $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1 > e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$ retour au QCM

5) *Soit X une variable aléatoire telle que X et X^2 admettent une espérance. Alors*

$\boxed{a}$ $\mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$; $\boxed{b}$ $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$; $\boxed{c}$ $\mathbb{E}(X^2) \leqslant \mathbb{E}(X)^2$; $\boxed{d}$ $\mathbb{E}(X^2) \geqslant \mathbb{E}(X)^2$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{a}$ **et** $\boxed{c}$. Comme $X^2 \geqslant 0$ presque sûrement et que $\mathbb{E}$ est croissante, $\mathbb{E}(X^2) \geqslant 0$ et $\boxed{a}$ est vraie. $\boxed{c}$: $\mathbb{E}(X^2) \leqslant \mathbb{E}(X)^2$ est dans le cours. À moins que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0$, c'est-à-dire que X soit presque constante, $\boxed{\cancel{b}}$ et $\boxed{\cancel{d}}$ sont fausses.

retour au QCM

6) *Soit X une variable aléatoire dont le carré admet une espérance. Alors*

$\boxed{a}$ $\mathbb{E}(1-X) = 1-\mathbb{E}(X)$; $\boxed{b}$ $\mathbb{V}(1-X) = \mathbb{V}(X)$; $\boxed{c}$ $\mathbb{V}(1-X) \leqslant 1-\mathbb{V}(X)$; $\boxed{d}$ $\mathbb{E}(1-X) = -\mathbb{E}(X)$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{a}$ **et** $\boxed{b}$. L'espérance est linéaire, et $\mathbb{E}(1) = 1$, donc $\boxed{a}$ est vraie et $\boxed{\cancel{d}}$ $\mathbb{E}(1-X) = -\mathbb{E}(X)$ est fausse.

D'après le cours, $\mathbb{V}(a+bX) = b^2\mathbb{V}(X)$ donc $\boxed{b}$: $\mathbb{V}(1-X) = \mathbb{V}(X)$ est vraie et $\boxed{\cancel{c}}$: $\mathbb{V}(1-X) \leqslant 1-\mathbb{V}(X)$ est fausse en général (si $\mathbb{V}(X) \neq \frac{1}{2}$).

retour au QCM

7) *Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors*

$\boxed{a}$ X *et* Y *indépendantes* $\Longrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *;*

$\boxed{b}$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *pour tous* X *et* Y *;*

$\boxed{c}$ X *et* Y *indépendantes* $\Longleftrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *;*

$\boxed{d}$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Longrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$. Si X et Y indépendantes, alors elles sont décorrelées, la réciproque étant fausse (donc $\boxed{\cancel{b}}$, $\boxed{\cancel{c}}$ et $\boxed{\cancel{d}}$ sont fausses).

retour au QCM

8) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$:*

$\boxed{a}$ $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

$\boxed{b}$ $\mathbb{V}(S_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}$;

$\boxed{c}$ $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\alpha^2}$;

$\boxed{d}$ $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \leqslant \alpha) \geqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\alpha^2}$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{a}}$ **et** $\boxed{\text{c}}$. $\boxed{\text{a}}$ est la loi faible des grands nombres, et $\boxed{\text{c}}$ l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par indépendance des X_i : $\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n^2}$ donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse si $n > 1$. $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse en général (faire tendre α vers 0).

retour au QCM

9) *Si X, Y, Z sont des variables aléatoires indépendantes deux à deux, alors*

$\boxed{a}$ *(X, Y, Z) sont indépendantes mutuellement ;* $\boxed{b}$ *X et $Y+Z$ sont indépendantes ;*

$\boxed{c}$ $\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$; $\boxed{d}$ $\mathbb{V}(X+Y+Z) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+\mathbb{V}(Z)$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{b}}$, $\boxed{\text{c}}$ **et** $\boxed{\text{d}}$. $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse (il y a des contre-exemples dans le cours), $\boxed{\text{b}}$ se montre avec $\mathbb{G}_{X+Y+Z} = \mathbb{G}X\mathbb{G}_{Y+Z}$ par exemple, $\boxed{\text{c}}$ se montre avec $\mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$, et $\boxed{\text{d}}$ est dans le cours.

retour au QCM

10) *Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, $\mathbb{G}_X$ sa série génératrice, et R_X le rayon de convergence de $\mathbb{G}_X$. Alors*

$\boxed{a}$ $\mathbb{G}_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$;

$\boxed{b}$ $R_X \leqslant 1$;

$\boxed{c}$ *Si $R_X > 1$, alors* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{G}_X''(1) - \mathbb{G}_X'(1)$;

$\boxed{d}$ $R_X \geqslant 1$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$. $\mathbb{G}_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ est dans le cours (c'est une conséquence de la formule du transfert), $R_X \geqslant 1$ donc $\boxed{\cancel{b}}$ $R_X \leqslant 1$ est faux en général ; En fait, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{G}_X''(1) + \mathbb{G}_X'(1) - \left(\mathbb{G}_X'(1)\right)^2$ donc, sauf si $\mathbb{G}_X'(1) = 2$, $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

retour au QCM