

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) Soit A un évènement dans un univers fini. A est indépendant de A :

- ☐ a) jamais; ☐ b) si A est impossible; ☐ c) si A est sûr; ☐ d) toujours. réponse

2) Soit A et B deux évènements d'un univers fini.

- ☐ a) A et B sont incompatibles $\implies A$ et B sont indépendants;
☐ b) A et B sont indépendants $\implies A$ et B sont incompatibles;
☐ c) A et B sont indépendants et incompatibles $\implies A = B = \emptyset$;
☐ d) A et B sont indépendants et incompatibles $\implies A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. réponse

3) Soit Ω un univers infini

- ☐ a) A impossible $\implies \mathbb{P}(A) = 0$; ☐ b) A impossible $\iff \mathbb{P}(A) = 0$; ☐ c) $\mathbb{P}(A) = 0 \implies A$ impossible. réponse

4) Soit A, B et C trois évènements quelconques :

- ☐ a) A, B, C sont mutuellement indépendants $\implies A, B, C$ sont indépendants deux à deux;
☐ b) A, B, C sont indépendants deux à deux $\implies A, B, C$ sont mutuellement indépendants;
☐ c) A, B, C sont mutuellement indépendants $\iff A, B, C$ sont indépendants deux à deux. réponse

5) Soit A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$:

- ☐ a) $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$; ☐ b) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ ssi A et B sont indépendants;
☐ c) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \iff \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$; ☐ d) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$. réponse

6) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements :

- ☐ a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$; ☐ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) > 1$; ☐ c) $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$. réponse

7) On admet que 50% des chats sont femelles (et bien sûr, 50% mâles), et que 99% des chats tricolores sont femelles. Alors

- ☐ a) la probabilité qu'un chat femelle soit tricolore dépend du pourcentage de tricolores dans la population;
☐ b) 1% des chats mâles sont tricolores; ☐ c) 1% des chats tricolores sont mâles;
☐ d) Si 1% des femelles sont tricolores, alors un chat sur 198 est tricolore. réponse

8) On considère une suite d'épreuves, et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'évènement « on réussit l'épreuve numéro n ». On suppose que $\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap \dots \cap R_n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la réussite au bout d'un certain temps est presque sûre. Alors

- ☐ a) les $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants; ☐ b) $\mathbb{P}(A_n) = \frac{\alpha}{n!}$; ☐ c) $\alpha = 1$. réponse

9) On lance de nombreuses fois un dé parfait à six faces. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = 0$.

- ☐ a) « on finit par obtenir un six » est presque sûr;
☐ b) si on a obtenu 100 six sur les 100 premiers lancers, la probabilité d'obtenir un six au 101^{ème} lancer est $\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$;
☐ c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_n : « sur les $2n$ premiers lancers, le nombre de lancers pairs est égal au nombre de lancers impairs ». Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$. réponse

1) Soit A un évènement dans un univers fini. A est indépendant de A :

☐ **a** jamais; ☐ **b** si A est impossible; ☐ **c** si A est sûr; ☐ **d** toujours.

.....

Réponses justes : ☒ **b** et ☒ **c**. A est indépendant de A équivaut à $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A)$, soit $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Les seuls évènements indépendants d'eux-mêmes sont impossibles ou sûrs. [retour au QCM](#)

2) Soit A et B deux évènements d'un univers fini.

☐ a A et B sont incompatibles $\implies A$ et B sont indépendants;

☐ b A et B sont indépendants $\implies A$ et B sont incompatibles;

☐ c A et B sont indépendants et incompatibles $\implies A = B = \emptyset$;

☐ d A et B sont indépendants et incompatibles $\implies A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

.....
Réponse juste : ☒ d . A et B sont incompatibles se traduit par $A \cap B = \emptyset$ soit $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$; A et B sont indépendants équivaut à $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ces deux propriétés ne s'impliquent pas l'une l'autre, donc ☐ a et ☐ b sont fausses.

Si A et B sont indépendants et incompatibles, alors $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$ donc ($\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$), soit ($A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$). ☒ d est vraie et ☐ c est fausse, car Ω et $\emptyset$ sont indépendants et incompatibles. [retour au QCM](#)

3) Soit Ω un univers infini

☐ **a** A impossible $\implies \mathbb{P}(A) = 0$; ☐ **b** A impossible $\iff \mathbb{P}(A) = 0$; ☐ **c** $\mathbb{P}(A) = 0 \implies A$ impossible.

.....
Réponse juste : ☒ **a**. A impossible signifie $A = \emptyset$, ce qui implique clairement $\mathbb{P}(A) = 0$. Dans un univers infini, il existe des évènements de probabilité nulle qui ne sont pas impossibles, donc ☐ **b** et ☐ **c** sont fausses.

[retour au QCM](#)

4) Soit A, B et C trois évènements quelconques :

☐ **a** A, B, C sont mutuellement indépendants $\implies A, B, C$ sont indépendants deux à deux;
 $\text{indépendants deux à deux} \implies A, B, C$ sont mutuellement indépendants;

☐ **b** A, B, C sont

☐ **c** A, B, C sont mutuellement indépendants $\iff A, B, C$ sont indépendants deux à deux.

.....
Réponse juste : ☒ **a**.

[retour au QCM](#)

5) Soit A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$:

☐ $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$;

☐ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$ ssi A et B sont indépendants;

☐ $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \iff \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$;

☐ $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$.

.....
Réponses justes : ☒ **a**, ☒ **b** et ☒ **c**. ☐ **a** est dans le cours (cela est vrai même si $\mathbb{P}(B) = 0$). A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, ceci équivaut à $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$. $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$. Si $\mathbb{P}(B \cap A) > 0$, on obtient après division par $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Enfin, dans le cas extrême où $B = A$, $\mathbb{P}(A|A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ qui est en général $> \mathbb{P}(A)$. ☐ **d** est fausse. [retour au QCM](#)

6) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements :

$$\boxed{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1;$$

$$\boxed{b} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) > 1;$$

$$\boxed{c} \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega.$$

.....
Réponses justes : $\boxed{a}$ et $\boxed{c}$. Un système complet d'évènements est une suite d'évènements incompatibles tels que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$, donc par σ -additivité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$. Ceci exclut $\boxed{b}$.

[retour au QCM](#)

7) On admet que 50% des chats sont femelles (et bien sûr, 50% mâles), et que 99% des chats tricolores sont femelles. Alors

☐ a la probabilité qu'un chat femelle soit tricolore dépend du pourcentage de tricolores dans la population;

☐ b 1% des chats mâles sont tricolores;

☐ c 1% des chats tricolores sont mâles;

☐ d Si 1% des femelles sont tricolores, alors un chat sur 198 est tricolore.

.....
Réponses justes : ☐ a et ☐ c. Notons T et F les évènements « le chat est tricolore » et « le chat est une femelle ».

Alors $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(F|T) = \frac{99}{100}$, donc $\mathbb{P}(\bar{F}|T) = 1 - \mathbb{P}(F|T) = \frac{1}{100}$, donc ☐ c est vraie; et de plus, $\mathbb{P}(T|F) = \frac{\mathbb{P}(F|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(F)} = 2 \cdot \frac{99}{100} \mathbb{P}(T)$ dépend effectivement de $\mathbb{P}(T)$, donc ☐ a est vraie. De même, $\mathbb{P}(T|\bar{F})$ dépend de $\mathbb{P}(T)$,

donc ☐ b est fausse en général.

Enfin, si $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{100}$, $\mathbb{P}(T|F) = \frac{198}{10^4} \neq \frac{1}{198}$; ☐ d est fausse.

[retour au QCM](#)

8) On considère une suite d'épreuves, et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'évènement « on réussit l'épreuve numéro n ». On pose $\alpha = \mathbb{P}(R_1)$; on suppose que $\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap \dots \cap R_n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la réussite au bout d'un certain temps est presque sûre. Alors

☐ **a** les $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants; ☐ **b** $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n R_k\right) = \frac{\alpha}{n!}$; ☐ **c** $\alpha = 1$.

Réponses justes : ☒ **b** et ☐ **c**. Si les évènements étaient indépendants, on aurait $\mathbb{P}(R_{n+1} | R_1 \cap \dots \cap R_n) = \alpha$, ce qui n'est pas le cas. ☒ **a** est fausse.

D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n R_k\right) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2 | R_1) \dots \mathbb{P}(R_n | R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}) = \frac{\alpha}{1.2 \dots (n-1)} =$

$\frac{\alpha}{n!}$. Posons $A_n = \bigcap_{k=1}^n R_k$; alors $(A_n \searrow A_{n+1})$ est un système presque complet d'évènements par hypothèse. Donc

$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \searrow A_{n+1}) = \alpha - 0$ par télescopage. ☒ **b** et ☐ **c** sont vraies.

[retour au QCM](#)

9) On lance de nombreuses fois un dé parfait à six faces. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = 0$.

☐ **a** « on finit par obtenir un six » est presque sûr ;

☐ **b** si on a obtenu 100 six sur les 100 premiers lancers, la probabilité d'obtenir un six au 101^{ème} lancer est $\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{100}$;

☐ **c** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_n : « sur les $2n$ premiers lancers, le nombre de lancers pairs est égal au nombre de lancers impairs ». Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

.....
Réponse juste : ☐ **a**. La probabilité de ne pas obtenir de six lors des n premiers lancers est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. ☐ **a** est vraie. En revanche, comme les lancers sont indépendants, ☒ **b** est fausse. Enfin, d'après la loi binomiale, $\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$. En posant $u_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, on admet que $\lim u_n = 0$ donc ☒ **c** est fausse.

[retour au QCM](#)