Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge

a si $\alpha < 1$; b si $\alpha > 1$; c si $\alpha \leqslant 1$; d [ne converge] jamais. réponse

---

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$

a diverge ; b converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$; c converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. réponse

---

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$

a converge en $+\infty$ mais pas en 0 ; b converge en 0 mais pas en $+\infty$;

c converge en 0 et en $+\infty$; d diverge en 0 et en $+\infty$. réponse

---

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(1+\cos^2 t\right)\sin t\,\mathrm{d}t$

a vaut 0 ; b est strictement positive ; c vaut 2π. réponse

---

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{\mathrm{d}t}{t}$

a diverge ; b converge ; c vaut 0 ; d vaut $2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. réponse

---

6) Dans $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

a on peut faire une IPP en posant $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t}\end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2}\end{cases}$;

b on peut faire une IPP en posant $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t}\end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = 1-\cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2}\end{cases}$;

c I_1 diverge ; d I_1 converge et vaut 0. réponse

---

7) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$

a converge ; b diverge ; c vaut 1. réponse

---

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

a vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$; b vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2u}\mathrm{d}u$; c vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$; d diverge. réponse

---

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

a converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$. b converge et vaut 0 ; c diverge. réponse

---

10) $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{|\sin t|}}$

a n'est pas intégrable sur $]0;\pi[$; b n'est pas intégrable sur $[0;\pi[$;

c n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$; d est intégrable sur $\mathbb{R}$. réponse

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *converge*

$\boxed{a}$ *si* $\alpha < 1$ *;* $\boxed{b}$ *si* $\alpha > 1$ *;* $\boxed{c}$ *si* $\alpha \leqslant 1$ *;* $\boxed{d}$ *[ne converge] jamais.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{d}}$. D'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Les deux intégrales ne convergent donc pas ensemble. $\boxed{\cancel{a}}$, $\boxed{\cancel{b}}$ et $\boxed{\cancel{c}}$ sont fausses. retour au QCM

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$

$\boxed{a}$ *diverge ;* $\boxed{b}$ *converge et vaut* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$; $\boxed{c}$ *converge et vaut* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$. Après le changement de variable $u = 1-t$, on trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ qui est une intégrale de référence convergente. $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$ par primitivation, donc diffère de la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_0^1 = 2$. $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

retour au QCM

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

$\boxed{a}$ *converge en $+\infty$ mais pas en 0 ;*

$\boxed{b}$ *converge en 0 mais pas en $+\infty$;*

$\boxed{c}$ *converge en 0 et en $+\infty$;*

$\boxed{d}$ *diverge en 0 et en $+\infty$.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$. $\displaystyle\frac{\sin t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge ; $\displaystyle\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. retour au QCM

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(1+\cos^2 t\right)\sin t \,\mathrm{d}t$

$\boxed{a}$ *vaut 0 ;* $\boxed{b}$ *est strictement positive ;* $\boxed{c}$ *vaut* 2π.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$. $t \mapsto \left(1+\cos^2 t\right)\sin t$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ $t \mapsto -\left(\cos t + \dfrac{\cos^3 t}{3}\right)$, de variation nulle entre 0 et 2π. retour au QCM

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{\mathrm{d}t}{t}$

$\boxed{a}$ *diverge ;* $\boxed{b}$ *converge ;* $\boxed{c}$ *vaut 0 ;* $\boxed{d}$ *vaut* $2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$. En 0, $f(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0 (croissances comparées). f est alors prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$, $f(t) = o(\mathrm{e}^{-t})$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

Comme f est strictement posiitve sur $\mathbb{R}_+$, son intégrale ne peut pas être nulle. $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

Enfin, un changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ donne $\dfrac{\mathrm{d}t}{t} = -u\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$ et $\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \mathrm{e}^{-\left(u+\frac{1}{u}\right)}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^0 f(u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et $\boxed{\mathrm{d}}$ en résulte par relation de Chasles.

retour au QCM

6) *Dans* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

$\boxed{a}$ *on peut faire une IPP en posant* $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$;

$\boxed{b}$ *on peut faire une IPP en posant* $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = 1-\cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$;

$\boxed{c}$ I_1 *diverge ;*

$\boxed{d}$ I_1 *converge et vaut 0.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$. $u(t) = -\cos t, v'(t) = \frac{-1}{t^2}$ donne $uv'(t) = \dfrac{\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0;1]$. $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

En revanche, $u(t) = 1-\cos t, v'(t) = \frac{-1}{t^2}$ donne $uv'(t) = -\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{2}$; de plus $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, d'où l'intégrabilité en $+\infty$. L'IPP est possible et donne $I = 0 + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$, qui est convergente et strictement positive.

$\boxed{\cancel{c}}$ et $\boxed{\cancel{d}}$ sont fausses.

retour au QCM

7) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$

$\boxed{a}$ *converge ;* $\boxed{b}$ *diverge ;* $\boxed{c}$ *vaut 1.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$. Après changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ devient $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u}$, qui est divergente. retour au QCM

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

$\boxed{a}$ *vaut* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ *;* $\boxed{b}$ *vaut* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2u}\,\mathrm{d}u$ *;* $\boxed{c}$ *vaut* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ *;* $\boxed{d}$ *diverge.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$. Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $u = t^2$ c'est-à-dire $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$, ou encore $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$.

Les deux intégrales convergent puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue ssur $\mathbb{R}_+$ et que $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ si $t \geqslant 1$. retour au QCM

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

$\boxed{a}$ *converge et vaut* $2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$. $\boxed{b}$ *converge et vaut 0 ;* $\boxed{c}$ *diverge ;*

....

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$. $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de même signe que t et de plus $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^4}} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$, donc l'intégrale diverge. retour au QCM

10) $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{|\sin t|}}$

$\boxed{a}$ *n'est pas intégrable sur* $]0;\pi[$;

$\boxed{b}$ *n'est pas intégrable sur* $[0;\pi[]$;

$\boxed{c}$ *n'est pas intégrable sur* $\mathbb{R}$;

$\boxed{d}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$.

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$. $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{|\sin t|}}$ a pour primitive $t \mapsto 2\sqrt{|\sin t|}$, qui est à variation finie entre 0 et π, donc $\boxed{\cancel{a}}$ et $\boxed{\cancel{b}}$ sont fausses.

Comme la primitive trouvée est périodique non constante, elle ne peut pas avoir de limite en $+\infty$, donc $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{|\sin t|}}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

retour au QCM