

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2(-1)^n}{3^n} x^{2n}$ est

☐ a $\frac{3}{2}$;

☐ b 3;

☐ c $\sqrt{3}$;

☐ d $-\sqrt{3}$.

réponse

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$

☐ a a un rayon de convergence infini;

☐ b a un rayon de convergence égal à 1;

☐ c a pour somme $\ln(1+x)$;

☐ d a pour somme $-\ln(1-x)$.

réponse

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{in\pi}{7}}}{n} x^n$

☐ a a pour rayon de convergence 1;

☐ b est dérivable sur $] -1; 1[$;

☐ c a pour dérivée sur $] -1; 1[: \frac{1}{1 - x e^{\frac{i\pi}{7}}}$.

☐ d sa série dérivée converge en 1;

réponse

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$

☐ a a pour rayon de convergence 1;

☐ b est définie sur $[-1; 1]$;

☐ c est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1; 1]$;

☐ d a pour dérivée seconde $\frac{1}{1-x}$.

réponse

5) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n!}}{n!}$

☐ a a un rayon de convergence infini;

☐ b a pour rayon de convergence 1;

☐ c a pour somme $\frac{1}{1-x}$;

☐ d a pour somme e^x .

réponse

6) $\frac{1}{(1+x)^2}$ a pour développement en série entière :

☐ a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n}{2} x^n$;

☐ b $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$;

☐ c $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$;

☐ d $\sum_{n=0}^{+\infty} (1)^n x^{2n}$.

réponse

7) $\arctan x$ a pour développement en série entière :

☐ a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$;

☐ b $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

☐ c $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$;

☐ d $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

réponse

8) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a pour somme :

☐ a $\cos x$;

☐ b $\operatorname{ch} x$;

☐ c e^{x^2} ;

☐ d $\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

réponse

9) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R et de somme $S(x)$ sur $] -R; R[$.

☐ a S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$;

☐ b réciproquement, toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$ est DSE;

☐ c Si $\lim_{x \rightarrow R_-} f(x)$ existe, alors f est continue sur $[0; R]$;

réponse

10) ☐ a $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3)$;

☐ b $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n$;

☐ c $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^4)$;

☐ d $\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{2^{2n}}$.

réponse

1) Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2(-1)^n}{3^n} x^{2n}$ est

☐ *a* $\frac{3}{2}$;

☐ *b* 3;

☐ *c* $\sqrt{3}$;

☐ *d* $-\sqrt{3}$.

.....
Réponse juste : ☒ *c*. En posant $u_n = \frac{2(-1)^n}{3^n} x^{2n}$ pour $x \neq 0$, on obtient après simplification $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -3x^2$; alors $\sum u_n$ converge absolument si $|x| < \sqrt{3}$ (donc $R \geq \sqrt{3}$) et diverge grossièrement si $|x| > \sqrt{3}$ (donc $R \leq \sqrt{3}$).
Finalement $R = \sqrt{3}$.

[retour au QCM](#)

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$

☐ **a** a un rayon de convergence infini;

☐ **b** a un rayon de convergence égal à 1;

☐ **c** a pour somme $\ln(1+x)$;

☐ **d** a pour somme $-\ln(1-x)$.

.....
 Réponses justes : ☒ **b** et ☒ **c**. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ a le même rayon de convergence que sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} x^{n-1}$, donc 1 ; la somme de la dérivée est $\frac{1}{1-x}$. La somme de la série est donc la primitive qui s'annule en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, soit $-\ln(1-x)$. [retour au QCM](#)

3) $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{in\pi}{7}}}{n} x^n$

☐ **a** a pour rayon de convergence 1 ;

☐ **b** est dérivable sur $] -1; 1[$;

☐ **c** a pour dérivée sur $] -1; 1[$: $\frac{1}{1 - xe^{\frac{i\pi}{7}}}$.

☐ **b** sa série dérivée converge en 1 ;

.....
 Réponses justes : ☐ **a** et ☐ **b**. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{\frac{in\pi}{7}}}{n} x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{in\pi}{7}} x^n$, c'est-à-dire 1, donc la fonction somme est dérivable sur $] -1; 1[$.

La série entière dérivée est $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{in\pi}{7}} x^{n-1}$ soit $e^{\frac{i\pi}{7}} \sum_{m \geq 0} e^{\frac{im\pi}{7}} x^m$; elle diverge grossièrement en 1, et sa somme vaut

$\frac{e^{\frac{i\pi}{7}}}{1 - xe^{\frac{i\pi}{7}}}$, donc ☐ **c** et ☒ **d** dont fausses.

[retour au QCM](#)

4) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$

☐ a pour rayon de convergence 1 ;

☐ est définie sur $[-1; 1]$;

☐ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1; 1]$;

☐ a pour dérivée seconde $\frac{1}{1-x}$.

.....
Réponses justes : ☐ et ☐. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} x^n$, soit 1. Cette série converge si $x = \pm 1$, et diverge grossièrement si $|x| > 1$. L'ensemble de définition de la fonction réelle associée est donc $[-1; 1]$.

La série dérivée est $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$, qui diverge en 1 ; et même, par croissance, $\lim_{x \rightarrow 1_-} S'(x) = +\infty$, donc la fonction n'est pas dérivable en 1, et encore moins $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1; 1]$. ☐ est fausse.

La série dérivée seconde est elle $\sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$ soit $\sum_{m \geq 0} \frac{m+1}{m+2} x^m$, dont la somme diffère de $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m$. ☐ est fausse.

[retour au QCM](#)

5) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n!}}{n!}$

☐ **a** a un rayon de convergence infini;

☐ **b** a pour rayon de convergence 1;

☐ **c** a pour somme $\frac{1}{1-x}$;

☐ **d** a pour somme e^x .

.....
Réponse juste : ☒ **a**. En posant $u_n = \frac{x^{n!}}{n!}$ pour $x \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x^{(n+1)!-n!} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x^{nn!}}{n+1}$ qui tend vers 0 si $|x| \leq 1$ (donc $R \geq 1$) et vers $+\infty$ si $x > 1$ (donc $R \leq 1$). Finalement $T = 1$, et ☐ **b** est fausse. [retour au QCM](#)

6) $\frac{1}{(1+x)^2}$ a pour développement en série entière :

☐ a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{n}{2} x^n$;
 ☐ b $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$;
 ☐ c $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$;
 ☐ d $\sum_{n=0}^{+\infty} (1)^n x^{2n}$.

.....
 Réponse juste : ☒ b. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ pour $|x| < 1$, donc par dérivation $\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1}$ puis par

décalage d'indice $m = n - 1$: $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \neq n+1$ donc ☐ a est fausse, ainsi

que ☒ c bien sûr. $\sum_{n=0}^{+\infty} (1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \neq \frac{1}{(1+x)^2}$ en général : ☐ d est fausse.

[retour au QCM](#)

7) $\arctan x$ a pour développement en série entière :

☐ a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} ;$

☐ b $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} ;$

☐ c $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} ;$

☐ d $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$

.....
Réponse juste : ☒ b . On peut le vérifier par dérivation : $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

[retour au QCM](#)

8) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a pour somme :

☐ a $\cos x$;

☐ b $\operatorname{ch} x$;

☐ c e^{x^2} ;

.....
Réponse juste : ☒ b . $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, donc ☐ b et ☒ c sont fausses. [retour au QCM](#)

9) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R et de somme $S(x)$ sur $] -R; R[$.

- ☐ **a** S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$; ☐ **b** réciproquement, toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$ est DSE ;
☐ **c** Si $\lim_{x \rightarrow R_-} f(x)$ existe, alors f est continue sur $[0; R]$.

.....
Réponse juste : ☒ **a**. Il existe des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui ne coïncident pas avec leur développement de Taylor ; ainsi, si on pose $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$, on obtient une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g^n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. g n'est donc pas DSE : ☐ **b** est fausse.

De plus, ☒ **c** est fausse : un contre-exemple est $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ en $x = 1_-$. Pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = \frac{1}{2}$ et pourtant $f(1)$ diverge, donc $f(1)$ n'est pas définie.

[retour au QCM](#)

10) $\boxed{a} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3);$

$\boxed{b} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n;$

$\boxed{c} \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^4);$

$\boxed{d} \sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{2^{2^n}}.$

.....
 Réponses justes : $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$. Avec $\alpha = \frac{-1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} -\frac{1+2k}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1+2k) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2}$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3)$, d'où $\boxed{a}$ et $\boxed{b}$.

Un calcul analogue avec $\alpha = \frac{1}{2}$, ou bien l'intégration de l'égalité ci-dessus, donne $\boxed{c}$. Les premières valeurs de n montrent que $\boxed{d}$ est fausse.

[retour au QCM](#)