SPE PT	QCM sur les séries numériques	2024/2025

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \ln 2$; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ converge car $\lim \frac{1}{n} = 0$;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{n}$; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. réponse

---

2) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ diverge ; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverge ;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln n}$ converge ; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ diverge. réponse

---

3) $\boxed{\text{a}}$ $(\sum u_n$ converge$) \Longrightarrow (u_n \to 0)$; $\boxed{\text{b}}$ $(\sum u_n$ diverge$) \Longrightarrow (u_n \not\to 0)$;

$\boxed{\text{c}}$ $(u_n \to 1) \Longrightarrow (\sum u_n$ diverge$)$; réponse

---

4) $\boxed{\text{a}}$ $(\sum u_n$ diverge$) \Longrightarrow (\sum |u_n|$ diverge$)$; $\boxed{\text{b}}$ $(\sum u_n$ converge$) \Longrightarrow (\sum |u_n|$ converge$)$;

$\boxed{\text{c}}$ $(\sum |u_n|$ converge$) \Longrightarrow (\sum u_n$ converge$)$; $\boxed{\text{d}}$ Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. réponse

---

5) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{n^2}$; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \ln n$. réponse

---

6) $\boxed{\text{a}}$ $(u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge$) \Longrightarrow (\sum u_n$ converge$)$; $\boxed{\text{b}}$ $(u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge$) \Longrightarrow (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$;

$\boxed{\text{c}}$ $(\sum u_n$ converge$) \Longrightarrow (\sum u_n^2$ converge$)$; $\boxed{\text{d}}$ $(\sum u_n^2$ converge$) \Longrightarrow (\sum u_n$ converge$)$. réponse

---

7) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{n\geqslant 0} n2^{-n}$ converge ; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n}$ converge ;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = o\left(\sum_{k=1}^{n} k2^{-k}\right)$; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} \geqslant 1$. réponse

---

8) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (\arctan(n+1) - \arctan n) = \frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{n\geqslant 0} (\arctan(n+1) - \arctan n)$ diverge ;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\arctan \frac{1}{n+1} - \arctan \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n} - \frac{2}{1+2^{n+1}} + \frac{1}{1+2^{n+2}} = \frac{3}{10}$. réponse

---

9) $\boxed{\text{a}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1_- \Longrightarrow (\sum u_n$ converge$)$; $\boxed{\text{b}}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow (\sum |u_n|$ converge$)$;

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \frac{1}{n^2} \Longrightarrow (\sum u_n$ converge$)$; $\boxed{\text{d}}$ $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{-1}{n^2} \Longrightarrow ((u_n)$ converge$)$. réponse

---

10) $\boxed{\text{a}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$;

$\boxed{\text{c}}$ $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} \sim \int_3^n \frac{dt}{t\ln t}$; $\boxed{\text{d}}$ $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k^2} \sim \int_3^n \frac{dt}{t\ln t^2}$. réponse

1) $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \ln 2$;

$\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *converge car* $\lim \frac{1}{n} = 0$;

$\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{n}$;

$\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{d}}$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\cancel{a}}$ et $\boxed{\cancel{b}}$ sont fausses.

Le théorème de comparaison série-intégrale donne $\boxed{\mathrm{d}}$, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse

retour au QCM

2) $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ *diverge;*

$\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ *diverge;*

$\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n\ln n}$ *converge;*

$\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ *diverge.*

....

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$. $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$, et $\alpha=\frac{3}{2}>1$ donc la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge : $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

Donc $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\sim\dfrac{1}{n^{1/2}}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverge.

Une comparaison série-intégrale montre que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n\ln n}$ diverge, puisque $\displaystyle\int_3^x\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\int_{\ln 3}^{\ln x}\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln\ln x-\ln\ln 3$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

Un télescopage donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1-\frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge : $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse.

retour au QCM

3) $\boxed{a}$ *($\sum u_n$ converge)* $\Longrightarrow (u_n \to 0)$; $\boxed{b}$ *($\sum u_n$ diverge)* $\Longrightarrow (u_n \not\to 0)$;
$\boxed{c}$ $(u_n \to 1) \Longrightarrow$ *($\sum u_n$ diverge)* ;

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$.

D'après le cours ($\sum u_n$ converge) $\Longrightarrow$ $(u_n \to 0)$. Par contraposée, $(u_n \to 1) \Longrightarrow$ ($\sum u_n$ diverge) (cas particulier de divergence grossière).

$\boxed{\cancel{d}}$ est fausse : $\dfrac{1}{n} \to 0$ et néanmoins $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

retour au QCM

4) $\boxed{a}$ *($\sum u_n$ diverge) $\Longrightarrow$ ($\sum |u_n|$ diverge) ;*

$\boxed{b}$ *($\sum u_n$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum |u_n|$ converge) ;*

$\boxed{c}$ *($\sum |u_n|$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum u_n$ converge) ;*

$\boxed{d}$ *Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.*

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$.

D'après le cours, ($\sum |u_n|$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum u_n$ converge) et par contraposition ($\sum u_n$ diverge) $\Longrightarrow$ ($\sum |u_n|$ diverge). On peut montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. Enfin, si $u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$, alors $|u_n| = \frac{1}{2^n}$ et la proposition concernant les séries géométriques donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$ alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$, donc $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse : il s'agit d'une grossière contrefaçon de l'inégalité triangulaire. retour au QCM

5) $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$;

$\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$;

$\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{n^2}$;

$\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

. . . .

Réponse justes : $\boxed{\mathbf{a}}$, $\boxed{\mathbf{b}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$.

Puisque $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, un télescopage et un passage à la limite donne $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$. D'après la comparaison série-intégrale, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sim \ln n$, mais $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ n'a pas de sens, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

retour au QCM

6) $\boxed{a}$ *($u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum u_n$ converge) ;* $\boxed{b}$ *($u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$) ;*

$\boxed{c}$ *($\sum u_n$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum u_n^2$ converge) ;* $\boxed{d}$ *($\sum u_n^2$ converge) $\Longrightarrow$ ($\sum u_n$ converge).*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$. Avec $u_n = -n$ et $v_n = 0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge mais $\sum u_n$ diverge : $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse (il manque l'hypothèse de possibilité).

($u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge) $\Longrightarrow \sum u_n$ converge, mais rien ne garantit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$: par exemple, $\dfrac{100}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$, mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{100}{2^n} = 100 > 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$: $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse.

$\boxed{\cancel{d}}$ est fausse : contre-exemple $u_n = \dfrac{1}{n^{2/3}}$; $\sum u_n$ diverge car $\frac{2}{3} < 1$ mais $\sum u_n^2$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = \frac{4}{3} > 1$).

retour au QCM

7) $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n2^{-n}$ *converge;* $\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n}$ *converge;*

$\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = o\left(\sum_{k=1}^{n} k2^{-k}\right)$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} \geqslant 1$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{a}}$ **et** $\boxed{\text{d}}$.

$n^3\,2^{-n} \to 0$ donc $n2^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n2^{-n}$ converge : $\boxed{\text{a}}$ est vraie. $\lim \dfrac{2^n}{n} = +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n}$ diverge : $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{-k}$ convergent (en tant que suite des sommes partielles de séries convergentes). Elles sont équivalentes à leur limite non nulle (respectivement ℓ_1 et ℓ_2), mais $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ ne tend pas vers 0, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} n2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8} > 1$. $\boxed{\text{d}}$ est vraie.

retour au QCM

8) $\boxed{a}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(\arctan(n+1)-\arctan n)=\frac{\pi}{2}$;

$\boxed{b}$ $\sum_{n\geqslant 0}(\arctan(n+1)-\arctan n)$ *diverge ;*

$\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\arctan\frac{1}{n+1}-\arctan\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}$;

$\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+2^n}-\frac{2}{1+2^{n+1}}+\frac{1}{1+2^{n+2}}=\frac{1}{6}$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$, le télescopage $\sum_{n=0}^{m}(\arctan(n+1)-\arctan n)=\arctan(m+1)-\arctan 0$ donne par passage à la limite $\sum_{n=0}^{+\infty}(\arctan(n+1)-\arctan n)=\frac{\pi}{2}$. $\boxed{\cancel{b}}$ est donc fausse.

De plus, $\arctan\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}-\arctan n$, donc par simplification : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\arctan\frac{1}{n+1}-\arctan\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

En posant $u_n=\frac{1}{1+2^n}$, $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$ et $u_0=\frac{1}{2}$, $u_1=\frac{1}{3}$, et par ailleurs $u_n-2u_{n+1}+u_{n+2}=(u_n-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_{n+2})$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-2u_{n+1}+u_{n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-u_{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}-u_{n+2}=u_0-1-(u_1-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

retour au QCM

9) $\boxed{a}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1_- \Longrightarrow (\sum u_n$ *converge)* ;

$\boxed{b}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow (\sum |u_n|$ *converge)* ;

$\boxed{c}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \dfrac{1}{n^2} \Longrightarrow (\sum u_n$ *converge)* ;

$\boxed{d}$ $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \dfrac{-1}{n^2} \Longrightarrow ((u_n)$ *converge)*.

....

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{b}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$.

Avec $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1_-$ et pourtant $\sum u_n$ diverge : $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

D'après le critère de d'Alembert, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-1}{2} \Longrightarrow (\sum |u_n|$ converge).

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1 - \dfrac{1}{n^2}$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim 1$, ce qui n'implique pas la convergence de $\sum u_n$ (*cf* le contre-exemple ci-dessus) : $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

Si $\delta_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \dfrac{-1}{n^2}$, alors δ_n est négative au-delà d'un certain rang, et $\sum \delta_n$ converge par comparaison (équivalents). Or $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, qui tend vers une limite finie. Alors *la suite* (u_n) converge.

retour au QCM

10) $\boxed{a}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$;

$\boxed{b}$ $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$;

$\boxed{c}$ $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \int_3^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$;

$\boxed{d}$ $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k^2} \sim \int_3^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t^2}$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathrm{b}}$ **et** $\boxed{\mathrm{c}}$.

$Z_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est la somme d'une série convergente, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{x \to +\infty} \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1$. $Z_2 = 1 + \frac{1}{4} + \cdots > 1$, donc les deux suites constantes ne sont pas équivalentes : $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse et $\boxed{\cancel{d}}$ aussi, car par comparaison série-intégrale $\displaystyle\sum \frac{1}{k(\ln k)^2}$ converge.

Également par comparaison série-intégrale, $\displaystyle\sum \frac{1}{k \ln k}$ diverge, et l'encadrement des sommes partielles par deux intégrales montre que $\ln\ln n - \ln\ln 3 \leqslant S_n \leqslant \ln\ln(n-1) - \ln\ln 3 + 3\ln 3$: $\boxed{\mathrm{c}}$ est vraie.

Toujours par comparaison série-intégrale, $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2}$ diverge, et l'encadrement des restes par deux intégrales montre que $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$: $\boxed{\mathrm{b}}$ est vraie.

retour au QCM