Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) Une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ présente une branche infinie lorsque :

a $t \to +\infty$ (parfois);
b $t \to t_0$, avec $\vec{M}'(t_0) = 0$;
c $t \to t_0$, avec $\|M'(t_0)\| \to +\infty$;
d $t \to t_0$, avec $\|M(t_0)\| \to +\infty$.

réponse

---

2) La courbe paramétrée définie par $(x(t), y(t)) = (1 - \cos t, \sin^2 t)$:

a est symétrique par rapport à O_x;
b est symétrique par rapport à O;
c est symétrique par rapport à la droite $x = \dfrac{1}{2}$, car $M(\pi - t) = \dots$
d peut être étudiée sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

réponse

---

3) La courbe paramétrée précédente ($(x(t), y(t)) = (1 - \cos t, \sin^2 t)$) passe par O en présentant :

a un point de rebroussement de première espèce
b un point d'inflexion;
c un point ordinaire;
d une tangente d'équation $y = \dfrac{x}{2}$;

réponse

---

4) La courbe paramétrée définie par $(x(t), y(t)) = \left(\dfrac{t^2}{1+t}, \dfrac{t^3}{1+t}\right)$ présente :

a une asymptote verticale en $t = -1$;
b une asymptote oblique en $t = -1$;
c une asymptote oblique en $t \to +\infty$;
d un point singulier à tangente horizontale en $t = 0$.

réponse

---

5) Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^2$,

a $\vec{N}$ est dirigé directement par $\vec{a}_N$;
b $R > 0$ si la courbe tourne à gauche;
c $R = 0$ en tout point d'inflexion;
d R change de signe en tout point d'inflexion.

réponse

---

6) Soit $\mathscr{S}$ la spirale logarithmique paramétrée par $(x(t), y(t)) = \left(e^{-\frac{t}{5}} \cos t, e^{-\frac{t}{5}} \sin t\right)$. Si $O = M(+\infty)$ et $A = M(0)$, la longueur de l'arc AO est

a infinie
b $\dfrac{\sqrt{26}}{5} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{5}} dt$
c $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{5}} dt$
d $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{5}} dt$

réponse

---

7) Soit (C) un arc de classe $\mathscr{C}^2$, s son abscisse curviligne et $(\vec{T}, \vec{N})$ la base de Frenet, le rayon R de courbure vérifie :

a $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$;
b $\dfrac{d\vec{N}}{dt} = R\vec{T}$;
c $\dfrac{d\vec{N}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{T}$;
d $\dfrac{ds}{dt}\dfrac{1}{R} = \vec{N} \cdot \dfrac{d\vec{T}}{dt}$

réponse

---

8) La développée d'un cercle C est

a le centre du cercle;
b un cercle concentrique à C, de rayon non nul;
c l'ensemble vide;
d un carré inscrit dans le cercle.

réponse

---

9) La développée d'un arc (C) de classe $\mathscr{C}^2$ est

a le lieu de ses centres de courbure;
b l'enveloppe des tangentes à (C);
c l'enveloppe des normales à (C);

réponse

---

10) Soit γ un arc régulier de classe $\mathscr{C}^2$, et $M(t)$ un point de γ; le cercle de courbure $\mathscr{C}(I, R)$:

a est normal à γ en $M(t)$;
b rencontre γ en un seul point;
c est osculateur à γ en $M(t)$;
d est tangent à γ en $M(t)$.

réponse

1) *Une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ présente une branche infinie lorsque :*

$\boxed{a}$ $t \to +\infty$;

$\boxed{b}$ $t \to t_0$, avec $\vec{M}'(t_0) = 0$;

$\boxed{c}$ $t \to t_0$, avec $\|M'(t_0)\| \to +\infty$;

$\boxed{d}$ $t \to t_0$, avec $\|M(t_0)\| \to +\infty$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{a}$ et $\boxed{d}$.

Lorsque t tend vers $+\infty$, si $x(t)$ et $y(t)$ convergent, la courbe présente un point asymptote qui peut être une branche infinie (une spirale) ou non (un point asymptote ordinaire, si x et y sont monotones au voisinage de t_0).

En revanche, si $\|M(t_0)\| \to +\infty$, on obtient forcément une branche infinie (éventuellement exotique) : $\boxed{d}$ est vraie.

$\vec{M}'(t_0) = 0$ caractérise un point singulier, et $\|M(t_0)\| \to +\infty$ n'a pas de signification claire (par exemple, si $(x(t), y(t)) = \left(\sqrt[3]{2t}, \sqrt[3]{t/4}\right)$ en $t = 0$ correspond à un point ordinaire d'une droite banale. $\boxed{\cancel{b}}$ et $\boxed{\cancel{c}}$ sont fausses.

retour au QCM

2) *La courbe paramétrée définie par* $(x(t), y(t)) = (1 - \cos t, \sin^2 t)$ *:*

$\boxed{a}$ *est symétrique par rapport à* O_x *;* $\boxed{b}$ *est symétrique par rapport à O ;*

$\boxed{c}$ *est symétrique par rapport à la droite* $x = 1$, *car* $M(\pi - t) = \dots$ $\boxed{d}$ *peut être étudiée sur* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{c}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$.

x et y sont 2π-périodiques et paires toutes deux, ce qui ne correspond à aucune symétrie géométrique, mais montre que toute la courbe est décrite pour $t \in [0\,\pi]$.

Comme y n'est pas impair, $\boxed{\cancel{a}}$ et $\boxed{\cancel{b}}$ sont fausses.

Un calcul montre que $M(\pi - t) = (1 + \cos t, \sin^2 t)$, donc le milieu de $M(\pi, t)$ et $M(0, t)$ est sur la droite d'équation $x = 1$. Alors la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = 1$, et peut être étudiée sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

retour au QCM

3) *La courbe paramétrée précédente $((x(t), y(t)) = (1 - \cos t, \sin^2 t))$ passe par O en présentant :*

$\boxed{a}$ *un point de rebroussement de première espèce* $\boxed{b}$ *un point d'inflexion ;*

$\boxed{c}$ *un point ordinaire ;* $\boxed{d}$ *une tangente d'équation $y = 2x$;* *réponse*

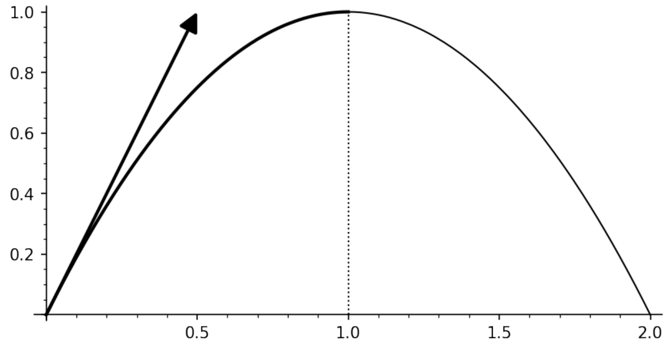
. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{a}}$ **et** $\boxed{\text{d}}$.

Puisque $(x'(t), y'(t)) = (\sin t, 2\sin t\cos t)$, $(x'(t), y'(t)) = (0, 0)$ donc $M(0)$ est un point singulier ;

Comme $M(-t) = M(t)$, la courbe présente un point de rebroussement en $M(0)$, sans traverser sa tangente ; donc $\boxed{\text{a}}$ est vraie, $\boxed{\cancel{b}}$ et $\boxed{\cancel{c}}$ sont fausses.

$M''(t) = (\cos t, 2\cos(2t))$, donc la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(1, 2)$: $\boxed{\text{d}}$ est vraie.



retour au QCM

4) *La courbe paramétrée définie par* $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^3}{1+t}\right)$ *présente :*

$\boxed{a}$ *une asymptote verticale en* $t = -1$;

$\boxed{b}$ *une asymptote oblique en* $t = -1$;

$\boxed{c}$ *une asymptote oblique en* $t \to +\infty$;

$\boxed{d}$ *un point singulier à tangente horizontale en* $t = 0$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{b}}$ et $\boxed{\mathbf{d}}$.

$\lim_{t \to -1_+} x(t) = +\infty$ mais $\lim_{t \to -1_-} y(t) = +\infty$, ce qui exclut une asymptote verticale. $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

$\frac{y(t)}{x(t)} = t$, donc $\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $y(t) + x(t) = \frac{t^3 + t^2}{t+1} = t^2$, donc $\lim_{t \to -1} y(t) + x(t) = 1$. Il y a donc bien une asymptote oblique en $t = -1$. $\boxed{b}$ est vraie.

$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, donc la branche infinie en $+\infty$ est une branche parabolique d'axe O_y : $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

$x(t) = t^2 - t^3 + o(t^3)$, $y(t) = t^3 + o(t^3)$, donc $M'(0) = \binom{0}{0}$, $M''(0) = 2\binom{1}{0}$, $M'''(0) = 6\binom{-1}{1}$; ainsi $p = 2$ et $q = 3$.

$M(0)$ est un point singulier à tangente horizontale. $\boxed{d}$ est vraie.

retour au QCM

5) *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^2$,*

$\boxed{a}$ *$\vec{N}$ est dirigé directement par $\vec{\gamma}_N$;*

$\boxed{b}$ *$R > 0$ si la courbe tourne à gauche ;*

$\boxed{c}$ *$R = 0$ en tout point d'inflexion ;*

$\boxed{d}$ *R change de signe en tout point d'inflexion.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{b}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$.

Si le rayon de courbure de γ est négatif, alors $\vec{\gamma}_N$ est de sens opposé à $\vec{N}$ donc $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

La courbe tourne à gauche si, et seulement si, $R > 0$: $\boxed{b}$ est vraie.

En un point d'inflexion, R change de signe en tendant vers $+\infty$, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse et $\boxed{d}$ vraie. retour au QCM

6) *Soit $\mathscr{S}$ la spirale logarithmique paramétrée par $(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\cos t, \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\sin t\right)$. Si $O = M(+\infty)$ et $A = M(0)$, la longueur de l'arc AO est*

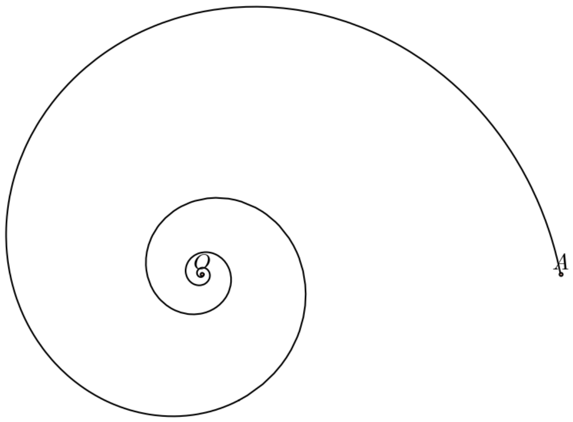
$\boxed{a}$ *infinie* $\boxed{b}$ $\dfrac{\sqrt{26}}{5}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\,\mathrm{d}t$ $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{5}}\,\mathrm{d}t$

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathrm{b}}$. $\vec{M}'(t) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}(-\cos t - 5\sin t, -\sin t + 5\cos t)$ donc $\left\|\vec{M}'(t)\right\|^2 = \dfrac{1}{25}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{5}}\left(\cos^2 t + 25\sin^2 t + 10\sin t\cos t +\right.$
$\dfrac{25+1}{25}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{5}}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{26}}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

Par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} -5\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right]_0^x = 5 \neq +\infty$.

Donc $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse, et $\boxed{\mathrm{b}}$ est vraie ; $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse. On peut vérifier que $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse.



retour au QCM

7) *Soit (C) un arc de classe $\mathscr{C}^2$, s son abscisse curviligne et $(\vec{T},\vec{N})$ la base de Frenet, le rayon R de courbure vérifie :*

$\boxed{a}$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{R}\vec{N}$; $\boxed{b}$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = R\vec{T}$; $\boxed{c}$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{R}\vec{T}$; $\boxed{d}$ $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{R} = \vec{N}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathrm{a}}$ **et** $\boxed{\mathrm{d}}$.

$\boxed{\mathrm{a}}$ est la définition de $\gamma = \dfrac{1}{R}$.

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = \det st\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \det st\,\vec{T} = \dfrac{-1}{R}\det st\,\vec{T}$, et en général $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \neq -1$, donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse.

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{1}{R}\vec{T}$, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

$\vec{N}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{N}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{N}\left(\dfrac{1}{R}\cdot\vec{N}\right) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{R}$, donc $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse. retour au QCM

8) *La développée d'un cercle $\mathcal{C}$ est*

$\boxed{a}$ *le centre du cercle ;* $\boxed{b}$ *un cercle concentrique à $\mathcal{C}$, de rayon non nul ;*

$\boxed{c}$ *l'ensemble vide ;* $\boxed{d}$ *un carré inscrit dans le cercle.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{a}$.

Le rayon de courbure d'un cercle est constante, et égal à son rayon ; le centre de courbure du cercle est son centre. $\boxed{a}$ est vraie.

Pour le coup, $\boxed{\cancel{b}}$, $\boxed{\cancel{c}}$ et $\boxed{\cancel{d}}$ sont fausses.

retour au QCM

9) *La développée d'un arc (C) de classe $\mathscr{C}^2$ est*

$\boxed{a}$ *le lieu de ses centres de courbure ;* $\boxed{b}$ *l'enveloppe des tangentes à (C) ;*

$\boxed{c}$ *l'enveloppe des normales à (C) ;*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$.

Le cours affirme que $\boxed{\mathrm{a}}$ et $\boxed{\mathrm{c}}$ sont vraies.

L'enveloppe des tangentes à (C) est (C), qui est différente de (C) en général $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. retour au QCM

10) *Soit γ un arc régulier de classe $\mathscr{C}^2$, et $M(t)$ un point de γ ; le cercle de courbure $\mathscr{C}(I,R)$:*

$\boxed{a}$ *est normal à γ en $M(t)$;* $\boxed{b}$ *rencontre γ en un seul point ;*

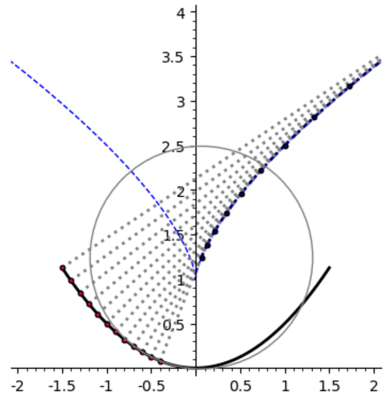
$\boxed{c}$ *est osculateur à γ en $M(t)$;* $\boxed{d}$ *est tangent à γ en $M(t)$.*

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{c}}$ **et** $\boxed{\text{d}}$.

$\boxed{\text{d}}$ est vraie, ce qui implique bien sûr que $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse.

$\boxed{\text{c}}$ est vraie. $\boxed{\cancel{b}}$ est souvent fausse, comme le montre la figure ci-dessous :



retour au QCM