

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est

- ☐ a une matrice de rotation (mais pas de symétrie); ☐ b une matrice de symétrie (mais pas de rotation);
☐ c aucune des deux; ☐ d les deux. réponse

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est orthogonale si et seulement si :

- ☐ a ses colonnes forment une base orthonormée; ☐ b ses colonnes forment une base orthogonale;
☐ c ses lignes forment une base orthonormée; ☐ d ses lignes forment une base orthogonale;
☐ e ses lignes et ses colonnes forment un angle droit. réponse

3) $-\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est :

- ☐ a une rotation de $\mathbb{R}^3$ (mais pas une symétrie); ☐ b une symétrie de $\mathbb{R}^3$ (mais pas une rotation);
☐ c les deux; ☐ d aucune des deux; réponse

4) $i^2 = -1$; $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

- ☐ a est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ☐ b est diagonalisable dans $\mathbb{C}$
☐ c n'est pas diagonalisable. réponse

5) Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- ☐ a forcément une matrice de symétrie; ☐ b une matrice de symétrie ssi elle est orthogonale;
☐ c forcément diagonalisable; ☐ d ne peut pas être une matrice de rotation. réponse

6) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- ☐ a est une matrice de symétrie non orthogonale;
☐ b est une matrice de symétrie orthogonale;
☐ c est une matrice de rotation; ☐ d n'est pas orthogonale. réponse

7) Si A est la matrice définie dans la question précédente, $-A$

- ☐ a est une matrice de symétrie non orthogonale; ☐ b est une matrice de symétrie orthogonale;
☐ c est une matrice de rotation; ☐ d n'est pas orthogonale. réponse

8) La composée des réflexions de $\mathbb{R}^3$, par rapport aux plans d'équation $x - y + z = 0$ et $x + y - z = 0$

- ☐ a est une réflexion ☐ b est une symétrie orthogonale
☐ c est une rotation ☐ d est l'identité réponse

9) $x^2 + y^2 + xy + x + y = 0$ définit

- ☐ a une ellipse; ☐ b une hyperbole;
☐ c l'ensemble vide; ☐ d une parabole. réponse

10) $x^2 + y^2 + 2xy + x - y = 0$ définit

- ☐ a une ellipse; ☐ b une hyperbole;
☐ c l'ensemble vide; ☐ d une parabole. réponse

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est

☐ **a** une matrice de rotation (mais pas de symétrie); ☐ **b** une matrice de symétrie (mais pas de rotation);
☐ **c** aucune des deux; ☐ **d** les deux.

.....
Réponse juste : ☒ **c**.

A est symétrique, mais pas orthogonale, puisque ses colonnes ne sont pas normées. Donc A n'est pas une matrice de rotation, ni une matrice de symétrie (sinon ce serait une symétrie orthogonale, car $A^2 = I_2$ et $A = A^T$ implique $A^T.A = I_2$).

☒ **a**, ☒ **b** et ☒ **d** sont fausses.

[retour au QCM](#)

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est orthogonale si et seulement si :

- ☐ **a** ses colonnes forment une base orthonormée; ☐ **b** ses colonnes forment une base orthogonale;
☐ **c** ses lignes forment une base orthonormée; ☐ **d** ses lignes forment une base orthogonale;
☐ **e** ses lignes et ses colonnes forment un angle droit.

.....
Réponses justes : ☐ **a** et ☐ **c**.

C'est du cours (on rappelle que A est orthogonale si, et seulement si, A^T est orthogonale). ☐ **b** et ☐ **d** sont des erreurs courantes.

☐ **e** est une plaisanterie : $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$ n'est pas orthogonale.

[retour au QCM](#)

3) $-\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est :

☐ *a* une rotation de $\mathbb{R}^3$ (mais pas une symétrie); ☐ *b* une symétrie de $\mathbb{R}^3$ (mais pas une rotation);

☐ *c* les deux; ☐ *d* aucune des deux;

.....

Réponse juste : ☒ *b*.

$\det(-\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = -1$ donc $-\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas une rotation : ☐ *a* est fausse.

$(-\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $-\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ (mais pas une rotation) : ☐ *b* est vraie.

☐ *c* et ☐ *d* est fausse.

[retour au QCM](#)

4) $i^2 = -1$; $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ ☐a est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ☐b est diagonalisable dans $\mathbb{C}$
☐c n'est pas diagonalisable.

.....
Réponse juste : ☐c. S est symétrique *non réelle*, donc le théorème spectral ne garantit pas que S soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et encore moins dans $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, S est de rang 1, et de trace nulle, donc elle n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$ ($\chi_S = X^2$, et $S \neq (0)$). ☒a et ☒b sont fausses, et ☐c est vraie. [retour au QCM](#)

5) Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

☐ a forcément une matrice de symétrie;

☐ b une matrice de symétrie ssi elle est orthogonale;

☐ c forcément diagonalisable;

☐ d ne peut pas être une matrice de rotation.

.....

Réponse juste : ☒ b et ☒ c.

Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de symétrie si, et seulement si, elle est orthogonale. ☐ a est fausse et ☒ b est vraie.

D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, donc ☒ c est vraie.

Une rotation d'angle 0 ou π est une symétrie, donc elle est symétrique : ☐ d est fausse.

[retour au QCM](#)

6) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐a est une matrice de symétrie non orthogonale;
☐b est une matrice de symétrie orthogonale;
☐c est une matrice de rotation; ☐d n'est pas orthogonale.

.....
Réponse juste : ☒b. Clairement $A^T = A$, et on peut vérifier que $A^T \cdot A = I_3$; alors $A^2 = I_3$, et A est une matrice de symétrie orthogonale. ☐b est vraie, ☐a et ☐d sont fausses.

Alors $\det(A) = -\text{Tr}(A) = -1$, donc A n'est pas une matrice de rotation. ☐c est fausse.

[retour au QCM](#)

7) Si A est la matrice définie dans la question précédente, $-A$

☐ a est une matrice de symétrie non orthogonale;

☐ b est une matrice de symétrie orthogonale;

☐ c est une matrice de rotation;

☐ d n'est pas orthogonale.

.....

Réponse juste : ☒ b . Comme A est une matrice de symétrie orthogonale, $-A$ est symétrique et orthogonale (puisque $-A^T \cdot (-A) = I_3$), donc $-A$ est une matrice de symétrie orthogonale. ☒ a et ☒ d sont fausses. ☐ b est vraie.

Enfin, $\det(-A) = -\det(A) = 1$ donc A est une matrice de rotation. ☐ c est vraie.

[retour au QCM](#)

8) La composée des réflexions de $\mathbb{R}^3$, par rapport aux plans d'équation $x - y + z = 0$ et $x + y - z = 0$

☐ a est une réflexion

☐ b est une symétrie orthogonale

☐ c est une rotation

☐ d est l'identité

.....
Réponse juste : ☒ c. La composée de deux réflexions est une rotation, donc ☒ c est vraie et ☒ d est fausse.

Les plans d'équation $x - y + z = 0$ et $x + y - z = 0$ ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 : (1, -1, 1)$ et $\vec{n}_2 : (1, -1, -1)$.
 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 - 1 = -1$, donc les plans ne sont ni confondus, ni perpendiculaires et la composée des réflexions n'est pas une symétrie, et encore moins l'identité.

☐ b et ☒ d sont fausses.

[retour au QCM](#)

9) $x^2 + y^2 + xy + x + y = 0$ définit

☐ a une ellipse;

☐ b une hyperbole;

☐ c l'ensemble vide;

☐ d une parabole.

.....
Réponse juste : ☒ a.

La matrice symétrique associée à $x^2 + y^2 + xy$ est $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\chi_{S_1} = (X-1)^2 - \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right)$.

Les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe, donc la conique est de type ellipse. ☐ b et ☐ d sont fausses.

Puisque la conique passe par $(0,0)$, ce n'est pas l'ensemble vide; l'intersection de la conique avec la droite $y = x$ vérifie $2x^2 + x^2 + 2x = x(3x + 2)$, donc contient deux points. La conique n'est pas réduite à un point. ☐ c est fausse.

Après le changement de repère correspondant à une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$: $(x_1, y_1) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)$, soit $(x, y) = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}\right)$: $x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2$, et $x + y = \sqrt{2}x_1$.

Alors $x^2 + y^2 + xy + x + y = \frac{1}{2} \left(3x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + y_1^2\right) = \frac{1}{2} \left(3\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + y_1^2 - \frac{2}{3}\right)$.

Il s'agit bien d'une ellipse.

[retour au QCM](#)

10) $x^2 + y^2 + 2xy + x - y = 0$ définit

☐ a une ellipse;

☐ b une hyperbole;

☐ c l'ensemble vide;

☐ d une parabole.

.....
Réponse juste : ☒ d.

La matrice symétrique associée à $x^2 + y^2 + 2xy$ est $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\chi_{S_1} = (X - 1)^2 - 1 = (X)(X - 2)$.

Les deux valeurs propres sont 0 et 2, donc la conique est de type parabole. ☒ a et ☒ b sont fausses.

Puisque la conique passe par (0, 0), ce n'est pas l'ensemble vide; ☒ c est fausse.

Après le changement de repère correspondant à une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$: $(x_1, y_1) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \right)$,

soit $(x, y) = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \right)$: $x^2 + y^2 + 2xy + x - y = (x + y)^2 + x - y = x_1^2 - y_1$.

Il s'agit bien d'une parabole. ☒ d est vraie.

[retour au QCM](#)