

Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.
 $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est ici un espace euclidien ou préhilbertien.

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2$

☐ a) définit un produit scalaire

☐ b) n'est pas bilinéaire

☐ c) n'est pas définie positive

réponse

2) Soit u et v deux vecteurs de E , $\|u + v\| = \|u\| - \|v\|$

☐ a) seulement si $v = 0_E$;

☐ b) si u et v sont colinéaires de même sens;

☐ c) si u et v sont colinéaires de sens opposés.

réponse

3) Soit u et v deux vecteurs quelconques de E , $\langle u | v \rangle =$

☐ a) $\frac{1}{4}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

☐ b) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$

☐ c) $\frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

☐ d) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$

réponse

4) Soit u et v deux vecteurs *non nuls* de E tels que $u \perp v$ et $v \perp w$.

☐ a) Alors u et w sont colinéaires.

☐ b) Alors $u \perp w$.

☐ c) Alors $\dim E \geq 3$.

réponse

5) Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$

☐ a) implique que (u, v, w) est orthogonale.

☐ b) implique que $u = v = w = 0_E$.

☐ c) aucun des précédents.

réponse

6) La matrice de la projection orthogonale sur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

☐ a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

☐ b) $B = \frac{1}{6}A$

☐ c) $C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

☐ d) $D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

réponse

7) Soit F et G deux sous-espaces de E ; alors $(F + G)^\perp =$

☐ a) $F^\perp + G^\perp$

☐ b) $F^\perp \cap G^\perp$

☐ c) $E \setminus (F + G)$

réponse

8) Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension p , et p_F la projection orthogonale sur F . Alors

☐ a) $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_k \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} e_k$ pour toute base de F .

☐ b) $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle e_k$ pour toute base *orthonormée* de F .

☐ c) $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_k \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} e_k$ pour toute base *orthogonale* de F .

☐ d) $p_{F^\perp} = \text{id}_E - p_F$ si $\dim(E) < +\infty$.

réponse

9) Soit F un espace vectoriel de dimension finie de E :

☐ a) $d(x, F) = \sup_{y \in F} \|x - y\|$

☐ b) $d(x, F) = \|\pi_F(x)\|$

☐ c) $d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|$

☐ d) $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2$

réponse

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) \longmapsto x_1 y_1 + \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2$

☐ **a** définit un produit scalaire

☐ **b** n'est pas bilinéaire

☐ **c** n'est pas définie positive

.....
Réponse juste : ☒ **a**.

φ est clairement bilinéaire et symétrique, donc ☐ **b** est fausse ; $\varphi(x, x) = x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1^2 = \left(x_1 + \frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{3y_1^2}{4} \geq 0$,
et $\varphi(x, x) = 0$ seulement si $x_1 + \frac{y_1}{2} = y_1 = 0$, donc si $x = (0, 0)$.

φ est définie positive : ☐ **c** est fausse et ☒ **a** est vraie.

[retour au QCM](#)

2) Soit u et v deux vecteurs de E , $\|u + v\| = \|u\| - \|v\|$

☐ *a* seulement si $v = 0_E$;

☐ *b* si u et v sont colinéaires de même sens ;

☐ *c* si u et v sont colinéaires de sens opposés.

.....
Réponse juste : ☒ *c*.

$\|u + v\| = \|u\| - \|v\|$ ressemble à un cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $\|u + v\| = |\|u\| - \|v\||$ avec $\|u\| \geq \|v\|$.

Ce cas d'égalité n'a lieu que si u et v sont colinéaires de sens opposés, et que de surcroît, $\|u\| \geq \|v\|$. ☒ *a* et ☒ *b* sont fausses.

[retour au QCM](#)

3) Soit u et v deux vecteurs quelconques de E , $\langle u|v \rangle =$

☐ $\frac{1}{4} (\|u\|^2 + \|v\|^2)$

☐ $\frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$

☐ $\frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

☐ $\frac{1}{4} (\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$

.....
Réponses justes : ☒ et ☐.

$\langle u|v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ est l'identité de polarisation, et $\langle u|v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ celle d'Al-Kashi.

$\frac{1}{4} (\|u\|^2 + \|v\|^2)$ ne vaut $\langle u|v \rangle$ que si $v = 0_E$: ☒ est fausse en général.

$\frac{1}{4} (\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme), qui ne vaut $\langle u|v \rangle$ que si $\|u - v\| = 0$,

donc si $u = v$. ☒ est fausse en général.

[retour au QCM](#)

4) Soit u et v deux vecteurs non nuls de E tels que $u \perp v$ et $v \perp w$:

☐ a Alors u et w sont colinéaires.

☐ b Alors $u \perp w$.

☐ c Alors $\dim E \geq 3$.

.....
Réponse juste : aucune. ☐ a n'est vraie qu'en dimension 1 ou 2, sinon ☒ a est fausse.

En général, $u \perp w$ est faux, par exemple si $u = w$. Dans ce cas ($u = w$), on n'a pas forcément $\dim E \geq 3$. ☒ b et

☒ c sont fausses.

[retour au QCM](#)

5) Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$

☐ *a* implique que (u, v, w) est orthogonale.

☐ *b* implique que $u = v = w = 0_E$ est orthogonale.

☐ *c* aucun des précédents.

.....
Réponse juste : ☐ *c*. La réciproque du théorème de Pythagore est fausse si $n \geq 3$; par exemple, si $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, \frac{1}{2})$, $w = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, alors $\|u\|^2 = 3$, $\|v\|^2 = \|w\|^2 = \frac{5}{4}$ et $\|u + v + w\|^2 = \frac{11}{2} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$, mais ni u n'est orthogonal ni à v ni à w , et v n'est pas orthogonal à w .

☒ *a*, et évidemment ☒ *b* sont fausses.

[retour au QCM](#)

6) La matrice de la projection orthogonale sur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

$$\boxed{a} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{b} \ B = \frac{1}{6}A \quad \boxed{c} \ C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \boxed{d} \ D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

.....
Réponse juste : $\boxed{b}$. les colonnes de A sont de norme 6, largement supérieure à celles des vecteurs de la base canonique. $\boxed{a}$ est fausse.

La projection orthogonale sur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, et la matrice C est de rang 2 : $\boxed{c}$ est fausse.

$N_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, mais $D.N_1 \neq (0)$, donc $\boxed{d}$ est fausse.

En revanche, avec $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, également orthogonal à U , $B.U = U$ et $B.N_1 = B.N_2 = (0)$, ce qui prouve $\boxed{b}$.
[retour au QCM](#)

7) Soit F et G deux sous-espaces de E ; alors $(F + G)^\perp =$

☐ a $F^\perp + G^\perp$

☒ b $F^\perp \cap G^\perp$

☐ c $E \setminus (F + G)$

.....
Réponse juste : ☒ b .

$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ (c'est du cours). $(F + G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ pour des raisons de dimensions, par exemple. ☐ a est fausse.

$E \setminus (F + G)$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E , donc ☐ c est fausse.

[retour au QCM](#)

8) Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension p , et p_F la projection orthogonale sur F . Alors

☐ **a** $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1$ pour toute base de F .

☐ **b** $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | e_1 \rangle e_1$ pour toute base orthonormée de F .

☐ **c** $p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1$ pour toute base orthogonale de F .

☐ **d** $p_{F^\perp} = \text{id}_E - p_F$ si $\dim(E) < +\infty$.

.....
Réponses justes : ☒ **b**, ☐ **c** et ☐ **d**.

$p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\langle x | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1$ ☐ **a** est hélas fausse pour toute base de F . ☒ **b** et ☐ **c** font partie du cours.

La dimension finie garantit l'existence de $F^\perp$, et alors $p_{F^\perp} + p_F = \text{id}_E$ est une conséquence de la définition de p_F , donc ☐ **d** est vraie.

[retour au QCM](#)

9) Soit F un espace vectoriel de dimension finie de E :

$$\boxed{a} \quad d(x, F) = \sup_{y \in F} \|x - y\| \quad \boxed{b} \quad d(x, F) = \|\pi_F(x)\| \quad \boxed{c} \quad d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\| \quad \boxed{d} \quad d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2$$

.....
Réponses justes : ☒ **c** et ☒ **d**.

$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ et non $\sup$... : ☐ **a** est fausse. D'après le cours, $d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|$; comme $x - \pi_F(x)$ et $\pi_F(x)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore montre que $\|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2$, et alors $d(x, F)^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|\pi_F(x)\|^2$. ☒ **c** et ☒ **d** sont donc vraies.

En revanche, $d(x, F) = \|\pi_F(x)\|$ n'est vraie que si $\|\pi_F(x)\| = \frac{1}{2} \|x\|$, ce qui est faux en général : ☐ **b** est fausse

[retour au QCM](#)