Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) Soit u un endomorphisme de E. a (u est inversible) $\Longleftrightarrow$ (0 est valeur propre de u);
b (u est inversible) $\Longleftrightarrow$ $(0 \notin \operatorname{Sp}(u))$;
c (u est inversible) $\Longleftrightarrow$ (u est diagonalisable). réponse

---

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. a ($A$ est diagonalisable) $\Longrightarrow$ (A^2 est diagonalisable) (réciproque fausse);
b (A^2 est diagonalisable) $\Longrightarrow$ (A est diagonalisable) (réciproque fausse);
c (A^2 est diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ (A est diagonalisable). réponse

---

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

a $\chi_A = X^2 + 1$; b $\chi_A = (X^2+1)(X-1)$;
c $\chi_A = (X^2-1)(X-1)$; d $\chi_A = (X^3-1)$. réponse

---

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a a quatre valeurs propres réelles; b a trois valeurs propres réelles;
c a une seule valeur propre réelle; d n'a aucune valeur propre réelle. réponse

---

5) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a T n'est pas diagonalisable; b T n'est pas trigonalisable; c T est diagonalisable. réponse

---

6) On considère $A = \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 65 & 16 & -28 \\ 16 & 65 & 28 \\ -28 & 28 & 32 \end{pmatrix}$, et **on admet que** $A^2 = A$.

a A est diagonalisable, de spectre $\{0,1\}$; b A est non diagonalisable, de spectre $\{0,1\}$;
c $\chi_A = X^2 - 1$; d $\chi_A = X^3 - 2X^2 + X$; e $\chi_A = X^3 - X^2$. réponse

---

7) A est la matrice définie ci-dessus, et $A' = 81\,A$.
a les vecteurs propres de A' sont les mêmes que ceux de A; b $\chi_{A'} = 81\chi_A$;
c les valeurs propres de A' sont 81 fois ceux de A; d $\chi_{A'}(X) = 81^3\chi_A\left(\frac{1}{81}\right)$;
e les valeurs propres de A' sont $\dfrac{1}{81}$ fois ceux de A. réponse

---

8) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a $\chi_B = X^3 - 2X^2 - \alpha X + 6$, $\alpha \in \mathbb{R}$; b $\chi_B = (X-1)(X-2)(X-3)$;
c B est triangulaire inférieure. réponse

1) $\boxed{a}$ *(u est inversible)* $\Longleftrightarrow$ *(0 est valeur propre de u) ;*

$\boxed{b}$ *(u est inversible)* $\Longleftrightarrow$ *(*$0 \notin \mathrm{Sp}(u)$*) ;*

$\boxed{c}$ *(u est inversible)* $\Longleftrightarrow$ *(u est diagonalisable).*

Réponse juste : $\boxed{\text{b}}$.

0 est valeur propre si, et seulement si, $\chi_u(0) = \det(u) = 0$, c'est-à-dire si u est non injectif. $\boxed{\text{b}}$ est vraie et $\boxed{\cancel{\text{a}}}$ fausse. Toute projection est diagonalisable, mais en générale pas inversible, donc $\boxed{\text{c}}$ est fausse.

retour au QCM

2) *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{a}$ *(A est diagonalisable)* $\Longrightarrow$ *(A^2 est diagonalisable) (réciproque fausse) ;*
$\boxed{b}$ *(A^2 est diagonalisable)* $\Longrightarrow$ *(A est diagonalisable) (réciproque fausse) ;*
$\boxed{c}$ *(A^2 est diagonalisable)* $\Longleftrightarrow$ *(A est diagonalisable).*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\text{a}}$.

Si A est diagonalisable, alors $A = P.D.P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, donc $A^2 = P.D^2.P^{-1}$ donc A^2 est diagonalisable ; ainsi $\boxed{\text{a}}$ est vraie. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors A est non diagonalisable mais $A^2 = (0)$ l'est clairement. Donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse, et évidemment, $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

retour au QCM

3) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Le polynôme caractéristique de A est*

$\boxed{a}$ $\chi_A = X^2 + 1$;

$\boxed{b}$ $\chi_A = (X^2 + 1)(X - 1)$;

$\boxed{c}$ $\chi_A = (X^2 - 1)(X - 1)$;

$\boxed{d}$ $\chi_A = (X^3 - 1)$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathrm{b}}$.

Le degré de χ_A est 3, et la trace de A est 1 ; ceci élimine les réponses fausses $\boxed{\cancel{\mathrm{a}}}$ et $\boxed{\cancel{\mathrm{c}}}$. Un calcul simple de χ_A montre que $\boxed{\mathrm{b}}$ est vraie, et $\boxed{\cancel{\mathrm{d}}}$ fausse (ce qui résulte d'ailleurs de la constatation que $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$). retour au QCM

4) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{a}$ *a quatre valeurs propres réelles ;* $\boxed{b}$ *a trois valeurs propres réelles ;*

$\boxed{c}$ *a une seule valeur propre réelle ;* $\boxed{d}$ *n'a aucune valeur propre réelle.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

$\boxed{\cancel{a}}$ est clairement fausse puisqu'elle impliquerait que $\deg \chi_A \geqslant 4$; $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse, car tout polynôme de degré 3 a au moins une racine réelle. Enfin un calcul raisonnablement long donne $\chi_A(X) = X^3 - 1$, ce qui montre que $\boxed{\mathbf{c}}$ est vraie et $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. retour au QCM

5) *Soit* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{a}$ *T n'est pas diagonalisable ;* $\boxed{b}$ *T n'est pas trigonalisable ;* $\boxed{c}$ *T est diagonalisable.*

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

$\chi_T = (X-1)(X-2)(X-3)$ est scindé à racines simples, donc T est diagonalisable ; $\boxed{\mathbf{c}}$ est vraie et $\boxed{\cancel{a}}$ et $\boxed{\cancel{b}}$ sont fausses.

retour au QCM

6) *On considère* $A = \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 65 & 16 & -28 \\ 16 & 65 & 28 \\ -28 & 28 & 32 \end{pmatrix}$, *et* ***on admet que*** $A^2 = A$.

$\boxed{a}$ *A est diagonalisable, de spectre* $\{0, 1\}$; $\boxed{b}$ *A est non diagonalisable, de spectre* $\{0, 1\}$;

$\boxed{c}$ $\chi_A = X^2 - 1$; $\boxed{d}$ $\chi_A = X^3 - 2X^2 + X$; $\boxed{e}$ $\chi_A = X^3 - X^2$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\text{a}}$ **et** $\boxed{\text{d}}$.

A est une matrice de projection donc $\boxed{\text{a}}$ est vraie et $\boxed{\cancel{\text{b}}}$ est fausse. $\mathrm{Tr}(A) = 2$ ce qui élimine $\boxed{\cancel{\text{c}}}$ et $\boxed{\cancel{\text{d}}}$; il est de plus clair que 0 est double et 1 simple, donc $\chi_A(X) = X(X-1)^2$ et $\boxed{\text{d}}$ est vraie.

retour au QCM

7) *A est la matrice définie ci-dessus, et $A' = 81\,A$.*

$\boxed{a}$ *les vecteurs propres de A' sont les mêmes que ceux de A ;* $\boxed{b}$ $\chi_{A'} = 81\chi_A$;

$\boxed{c}$ *les valeurs propres de A' sont 81 fois celles de A ;* $\boxed{d}$ $\chi_{A'}(X) = 81^3\chi_A\left(\frac{1}{81}\right)$;

$\boxed{e}$ *les valeurs propres de A' sont $\dfrac{1}{81}$ fois ceux de A.*

. . . .

Réponses justes : $\boxed{a}$, $\boxed{c}$ et $\boxed{d}$. Si $A.X = \lambda\,X$ avec $X \in E\setminus\{0\}$, alors $A'.X = 81\lambda\,X$, donc les les vecteurs propres de A' sont les mêmes que ceux de A ($\boxed{a}$ est vraie) et les valeurs propres de A' sont 81 fois celles de A ($\boxed{c}$ est vraie, et $\boxed{\cancel{e}}$ est fausse).

$\chi_{A'}(X) = \det\left(X\,I - A'\right) = \det\left(81\left(\dfrac{X}{81}\,I - A\right)\right) = 81^3\det\left(\frac{X}{81}\,I - A\right) = 81^3\chi_A\left(\frac{X}{81}\right)$ donc $\boxed{d}$ est vraie et $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse.

retour au QCM

8) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{a}$ $\chi_B = X^3 - 2X^2 - \alpha X + 6$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

$\boxed{b}$ $\chi_B = (X-1)(X-2)(X-3)$;

$\boxed{c}$ *B est triangulaire inférieure.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathrm{a}}$.

$\mathrm{Tr}\,(B) = 2$ et $\det(B) = -6$ donc $\chi_B = X^3 - 2X^2 - \alpha X + 6$: $\boxed{\mathrm{a}}$ est vraie. $B - 2I_3$ est inversible donc 2 n'est pas une valeur propre de B ; $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. $\boxed{\cancel{c}}$ est « grossièrement » fausse.

retour au QCM